


TENTANDA VIA


3 9007 0282 1152 2

LEÇONS

SUR LES

FONCTIONS ENTIÈRES OU MÉROMORPHES

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe. (*Collection de Monographies sur la Théorie des fonctions*, publiée sous la direction de M. Émile Borel.) Paris, Gauthier-Villars, 1910.

Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications. (*Collection de Monographies sur la Théorie des fonctions*, publiée sous la direction de M. Émile Borel.) Paris, Gauthier-Villars, 1927.

Cours de Mathématiques générales, professé à la Faculté des Sciences de Paris (en collaboration avec M. E. Vessiot). Paris, Librairie de l'Enseignement technique, 1921.

Cours de Mécanique rationnelle, professé à la Faculté des Sciences de Paris. Paris, Librairie de l'Enseignement technique, 1925.

Statique et Résistance des Matériaux. Paris, Gauthier-Villars, 1924.

Éléments de la Théorie mathématique de l'Élasticité. Paris, Librairie de l'Enseignement technique, 1928.

PUBLICATIONS DU SÉMINAIRE MATHÉMATIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE CLUJ

LEÇONS

SUR LES

FONCTIONS ENTIÈRES OU MÉROMORPHES

PAR

Paul MONTEL
Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris

RECUEILLIES ET RÉDIGÉES

Par P. SERGESCO
Professeur à l'Université de Cluj.



PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1932

PRÉFACE

M. P. Sergesco, à qui l'activité mathématique de la Roumanie doit tant d'initiatives heureuses soutenues par un inlassable dévouement, a jugé utile de publier une série d'Ouvrages destinés à servir de guides au public mathématique, placés entre les traités classiques et les mémoires originaux : ils conduiront ainsi les travailleurs au seuil même des régions où s'élabore la recherche mathématique. Ces Ouvrages seront édités par les soins de l'Université de Cluj.

Il a bien voulu me demander de composer le premier d'entre eux : je lui suis très reconnaissant d'avoir ainsi donné un nouveau témoignage des liens d'amitié et d'estime qui unissent les mathématiciens roumains et ceux de mon pays.

Ce petit Livre traite de la théorie moderne des fonctions entières ou méromorphes. Cette théorie, depuis la découverte due à M. Picard, a pour but l'examen de la répartition, autour du point singulier, des points où la fonction prend une même valeur. L'étude de la distribution des modules de ces points est très avancée et les résultats paraissent avoir pris une forme définitive avec les travaux de M. R. Nevanlinna : ils sont exposés dans les trois premiers chapitres. Les deux derniers sont consacrés à l'étude de la distribution des arguments des mêmes points, étude beaucoup plus récente et dont les progrès semblent liés à ceux de la théorie des familles normales dans laquelle elle a trouvé son point de départ et ses premiers progrès.

Le texte reproduit en substance les leçons que j'ai eu l'honneur de faire à l'Université de Cluj en mai 1929. La rédaction est due à M. P. Sergesco à qui j'adresse mes vifs compliments pour le soin et l'exactitude avec lesquels il les a restituées. Il a ajouté quelques pages tirées de mon enseignement à la Sorbonne la même année, d'après la rédaction de M. Brun, élève à l'École Normale supérieure, que je

suis heureux de remercier aussi. Depuis que ces leçons ont été professées, la Collection de Monographies que dirige M. Émile Borel a publié un livre de M. R. Nevanlinna : *Sur le théorème de Picard-Borel*, qui contient un exposé magistral des travaux de son auteur. Je ne saurais mieux faire que d'y renvoyer le lecteur.

Je souhaite le plus franc succès à cette Collection d'initiations mathématiques. Je voudrais espérer que ce premier Ouvrage rendra quelques-uns des services que l'on attend d'elle. En tout cas il pourra, par ses défauts mêmes, marquer les écueils à éviter.

L'impression des livres a été confiée à la maison Gauthier-Villars et Cie : c'est assurer à leur présentation une forme universellement réputée.

PAUL MONTEL.



INTRODUCTION

L'Algèbre étudie les polynomes et les fractions rationnelles; la Théorie générale des fonctions étudie d'abord les plus simples des fonctions, après celles de l'Algèbre : les fonctions entières et les fonctions méromorphes.

Une *fonction entière* de la variable représentée par z est une série ordonnée suivant les puissances croissantes de z et convergente dans tout le plan de la variable complexe. C'est, en quelque sorte, un polynome indéfini.

Une *fonction méromorphe*, quotient de deux fonctions entières, apparaît aussi comme une fraction rationnelle indéfinie.

Il y a une différence profonde entre les fonctions entières ou méromorphes et les fonctions de l'Algèbre. Le fait de réunir, non plus un nombre fini, mais une infinité de monômes en z, fait naître à l'infini un point singulier d'une nature spéciale appelé *point singulier essentiel*, que les polynomes ni les fractions rationnelles ne possèdent. Il est vrai que, dans l'étude de ces dernières fonctions, on appelle singulières les valeurs qui rendent les fonctions infinies : ce sont les *pôles*. Mais, dans la Théorie des fonctions, ces valeurs ne doivent pas être considérées comme singulières, car l'infini est une valeur ordinaire dans le plan de la variable complexe ou sur la sphère de Riemann qui lui correspond par une projection stéréographique.

Ce qui caractérise une fonction, ce qui la distingue des autres, c'est l'ensemble de ses singularités. Il en est des fonctions comme des objets concrets et des êtres vivants. C'est donc cet ensemble de points singuliers qu'il faut étudier pour connaître la nature profonde d'une fonction. A ce point de vue, *les fonctions entières et méromorphes sont caractérisées par l'existence d'un seul point singulier*. Elles apparaissent ainsi comme les plus simples.

Pour nous rendre compte de la distribution des valeurs que prend une fonction $f(z)$, nous allons étudier la répartition des racines de l'équation

$$f(z) = a,$$

dans laquelle a désigne une constante arbitraire.

Le problème est bien simple pour le cas des polynomes. En effet, soit $P(z)$ un polynome de degré n. L'équation $P(z) = a$ a n racines. On peut les enfermer toutes dans un cercle suffisamment grand, ayant pour centre l'origine.

Le nombre des racines croît donc avec le degré n du polynome. D'autre part, quand le point z s'éloigne à l'infini, le module de $P(z)$ croît comme r^n, en posant $r = |z|$. Donc, un polynome prend la valeur a arbitraire un nombre de fois d'autant plus grand que son module croît plus vite vers l'infini, quand le module r de z croît indéfiniment. Il y a un lien étroit entre le nombre des zéros de $P(z) = a$ et la rapidité de la croissance du module de $P(z)$.

Alors, pour étudier la distribution des zéros de $f(z) - a$, $f(z)$ désignant maintenant une fonction entière, nous sommes conduits à examiner comment se comporte $|f(z)|$, ou plutôt son maximum pour $|z| = r$, quand z s'éloigne à l'infini.

Avant 1879, on savait seulement que, au voisinage du point à l'infini, $f(z)$ s'approche autant qu'on le veut de toute valeur; c'est-à-dire que $f(z)$ prend, pour des valeurs de z dont le module est arbitrairement grand, des valeurs pour lesquelles $|f(z) - a|$ est arbitrairement petit.

En 1879, M. Picard fit connaître un théorème célèbre : *Une fonction entière $f(z)$ prend, au voisinage du point à l'infini, une infinité de fois toute valeur, sauf peut-être une seule.*

Si cette valeur existe, comme il arrive par exemple pour la fonction e^z qui ne prend jamais la valeur zéro, on dit que c'est une *valeur exceptionnelle*, au sens de M. Picard, pour la fonction considérée.

Pour toute valeur a non exceptionnelle, l'étude de la distribution des zéros de $f(z) - a$ nous conduira à deux types de questions. En premier lieu, on peut s'occuper des *modules* de ces zéros; en second lieu, de leurs *arguments*. En d'autres termes : considérons des cercles de centre O ($z = 0$) et de rayon r croissant. Combien y a-t-il de

racines de l'équation $f(z) = a$, dans le cercle de rayon r ? Comment ce nombre croît-il indéfiniment avec r ?

D'autre part, considérons un angle de sommet O ; combien cet angle contient-il de racines de l'équation et, s'il y en a une infinité, quelles sont les droites de condensation des directions qui joignent l'origine à ces racines ?

Examinons d'abord les problèmes du premier type. Considérons une fonction entière $f(z)$ et un cercle de centre O et de rayon r. Désignons par $M(r)$ le maximum de $|f(z)|$ sur la circonférence $|z| = r$: on sait que $M(r)$ est aussi le maximum de $|f(z)|$ dans tout le cercle considéré et que c'est une fonction croissante de r. On peut étudier la distribution des zéros de $f(z) - a$, pour les fonctions dont le module maximum $M(r)$ a une croissance déterminée comparable par exemple à e^r ou e^{r^2} ou e^{e^r}, etc. Le résultat de ces recherches peut se résumer ainsi : à mesure que la croissance de $M(r)$, quand r tend vers l'infini, est plus rapide, le nombre des zéros de $f(z) - a$ situés dans le cercle de rayon r augmente la densité des zéros de $f(z) - a$ est plus grande si $M(r)$ croît plus vite. Les théorèmes de Poincaré, de M. Hadamard, de M. Borel, fixent d'une manière précise les liens qui unissent la croissance de $M(r)$ à celle du module du $n^{\text{ième}}$ zéro de $f(z) - a$. Cette dernière loi est, en général, indépendante de la valeur a, mais pas toujours, comme on le voit aussitôt si a est une valeur exceptionnelle au sens de M. Picard ; il peut arriver que, pour une valeur a, la distribution des zéros de $f(z) - a$ soit plus raréfiée que celle des autres valeurs ; on dit alors que a est une valeur exceptionnelle au sens de M. Borel. M. Borel a démontré que ce fait ne peut se produire que pour une seule valeur de a.

Pour étudier une fonction $f(z)$ méromorphe dans le plan, on la met sous la forme du quotient $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ de deux fonctions entières $f_1(z)$ et $f_2(z)$ et la distribution des racines de

$$f(z) - a = 0$$

ou de

$$f_1(z) - a f_2(z) = 0$$

est liée à la croissance des modules maxima $M_1(r)$ et $M_2(r)$ des fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$. Le théorème de M. Picard peut comporter ici *deux* valeurs exceptionnelles et celui de M. Borel peut comporter

deux distributions exceptionnelles. A ce point de vue, les fonctions entières doivent être considérées comme des fonctions admettant la valeur infinie comme valeur exceptionnelle.

Tous ces résultats ont pris une forme qui paraît définitive à la suite des travaux de M. Rolf Nevanlinna, qui attache à chaque fonction, entière ou méromorphe, une *fonction caractéristique* $T(r)$ dépendant à la fois de la croissance de son module et de la distribution de ses pôles. Cette fonction $T(r)$ est, en effet, la somme de deux termes : le premier est une valeur moyenne des valeurs positives du logarithme du module de $f(z)$ sur la circonférence $|z| = r$; il est d'autant plus grand que ces modules sont plus grands; le second dépend du nombre des pôles de modules inférieurs à r; il est d'autant plus grand que ce nombre est plus élevé. Or, la fonction $T(r)$ ne change pas quand on remplace $f(z)$ par $\frac{1}{f(z)-a}$: plus précisément, les deux valeurs de $T(r)$ relatives à ces deux fonctions ont une différence qui reste finie lorsque r croît indéfiniment. Il en résulte une loi d'équilibre entre les deux termes dont la somme forme $T(r)$; si l'un augmente, l'autre diminue; le premier croît lorsque $f(z)$ s'approche de a, le second lorsque $f(z)$ prend effectivement la valeur a. Si la fonction s'approche lentement de la valeur a, la densité des zéros de $f(z)-a$ augmente, et inversement. Cette loi d'équilibre forme le premier théorème fondamental de M. R. Nevanlinna.

La fonction caractéristique permet aussi de mesurer en quelque sorte le degré de raréfaction des zéros de $f(z)-a$, pour certaines valeurs de a. On peut attacher, à chaque valeur a, un nombre appelé *excès*, qui varie entre 0 et 1, qui est nul pour une distribution ordinaire des zéros de $f(z)-a$ et égal à *un* pour une valeur a exceptionnelle de M. Picard. M. Nevanlinna montre que *l'ensemble des valeurs a pour lesquelles l'excès n'est pas nul est fini ou dénombrable et que la somme des excès ne dépasse pas deux.*

Ce théorème, qui comprend celui de M. Picard comme cas particulier, paraît donner à la notion de valeur exceptionnelle son sens le plus complet et le plus pénétrant.

Si nous passons à l'étude des arguments des zéros de $f(z)-a$, nous abordons un groupe de recherches commencées vers 1920. La méthode consiste à morceler le plan autour du point singulier et à dessiner dans son voisinage un pavage formé, par exemple, par une infinité

de disques circulaires centrés sur le point singulier. Les valeurs de la fonction correspondant aux valeurs de z de chaque pavé sont considérées comme constituant une fonction particulière. D'une manière plus précise, en faisant la représentation conforme de chaque pavé sur un domaine fixe (d), nous sommes ramenés à étudier, dans ce domaine (d), une suite infinie de fonctions

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots$$

telles que les valeurs que prend $f_n(z)$ dans le domaine (d) soient les valeurs que prend $f(z)$ dans le $n^{\text{ième}}$ pavé. On parvient ainsi à une sorte de fractionnement de l'étude de la fonction $f(z)$ autour du point singulier.

Or, pour une suite infinie de fonctions définies dans un même domaine, il peut arriver que toute suite partielle contienne une suite convergeant uniformément dans l'intérieur du domaine; on dit alors que les fonctions de la suite forment une *famille normale*. Dans le cas contraire, il existe dans le domaine des points tels que, dans tout cercle, si petit soit-il, ayant un de ces points pour centre, la famille n'est pas normale : un tel point est appelé *point irrégulier*. Il semble qu'un point irrégulier joue, vis-à-vis de la famille des fonctions, un rôle analogue à celui du point singulier par rapport à une fonction analytique. C'est un *point singulier collectif*.

En utilisant les propriétés des familles normales et des points irréguliers, M. G. Julia a obtenu des résultats importants relatifs à la distribution des arguments des zéros de $f(z) - a$.

Soit $f(z)$ une fonction entière : *il existe au moins une demi-droite* OJ *telle que dans tout angle, si petit soit-il, contenant* OJ *à l'intérieur, la fonction* $f(z)$ *prend une infinité de fois toute valeur, sauf une valeur exceptionnelle au plus.*

En d'autres termes, les directions des zéros de $f(z) - a$ s'accumulent sur les demi-droites OJ ou (J). Par exemple, pour $f(z) = e^z$, il y a deux directions OJ portées par l'axe imaginaire.

Dans le cas d'une fonction méromorphe, les droites (J) sont des droites de condensation des directions des zéros de $f(z) - a$, sauf peut-être pour deux valeurs de a, finies ou non. Mais toute fonction méromorphe n'admet pas nécessairement une direction (J).

En utilisant la théorie des familles normales de fonctions méromorphes, M. Ostrowski a montré que toutes les fonctions méro-

morphes admettent au moins une demi-droite (J), sauf certaines fonctions exceptionnelles qui sont de la forme

$$f(z) = z^m \frac{\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_i}\right)}{\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{b_j}\right)},$$

où les a_i désignent les zéros et b_j les pôles de $f(z)$. Mais toute fonction de cette forme n'est pas nécessairement exceptionnelle. Il faut que la distribution des a_i et des b_j obéisse a des conditions particulières de régularité précisées par l'auteur.

Par une méthode voisine de celle de M. Ostrowski, mais, en remplaçant les familles normales par des familles quasi-normales, c'est-à-dire admettant un nombre borné de points irréguliers, M. Walther Saxer a obtenu des résultats plus complets encore relatifs à la densité des zéros dans chaque secteur.

Considérons une demi-droite (J) et un angle d'origine O, ayant cette droite comme bissectrice. Découpons dans cet angle des quadrilatères curvilignes au moyen d'arcs de cercles dont les rayons sont en progression géométrique. Sauf peut-être pour deux valeurs de a, il y a des zéros de $f(z) - a$ dans une infinité de ces quadrilatères. Mais le nombre des zéros situés dans chaque-quadrilatère peut demeurer borné ou augmenter indéfiniment, lorsque a est fixé. M. W. Saxer a montré que ce nombre augmente indéfiniment, sauf peut-être pour deux valeurs de a, à moins que la fonction ne soit une fonction exceptionnelle du type indiqué plus haut, mais pour laquelle la distribution des a_i et b_j satisfait à des conditions de régularité naturellement moins étroites que pour les fonctions de M. Ostrowski.

M. André Bloch a fait remarquer que les directions (J) devaient avoir des propriétés voisines de celles des points singuliers situés sur le cercle de convergence d'une série de Taylor. Une fonction entière est une série de Taylor dont le rayon de convergence est infini et il y a lieu de comparer les directions (J) aux rayons passant par les points singuliers situés sur le cercle de convergence d'une série de Taylor dont le rayon de convergence est fini.

Des recherches ont été entreprises dans cette voie par différents

auteurs. Il convient de signaler au moins les résultats très importants dus à M. G. Pólya, qui mettent en évidence une analogie très profonde. A la plupart des théorèmes sur les points singuliers du cercle de convergence, il a pu faire correspondre des théorèmes sur les droites (J).

Prenons, par exemple, le théorème de Fatou : *Étant donnée la fonction* $f(z) = \Sigma a_n z^n$, *on peut choisir une suite de nombres* ε_n *égaux à* ± 1 *de manière que le cercle de convergence soit une coupure pour la fonction* $g(z) = \Sigma \varepsilon_n a_n z^n$.

On a un résultat semblable pour les droites (J) :

Si la série $f(z) = \Sigma a_n z^n$ *représente une fonction entière d'ordre infini, on peut trouver une suite de nombres* ε_n *égaux à* ± 1 *telle que la fonction* $g(z) = \Sigma \varepsilon_n a_n z^n$ *admette comme directions* (J) *toutes les directions issues de l'origine.*

Prenons comme autre exemple le théorème de M. Fabry : *Si la série* $f(z) = \Sigma a_n z^n$ *présente des lacunes assez larges, c'est-à-dire si deux coefficients non nuls consécutifs comprennent entre eux un nombre de coefficients nuls qui augmente indéfiniment avec le rang de la lacune, le cercle de convergence de la série est une coupure de la fonction.*

Dans les mêmes conditions : *Si la série représente une fonction entière de genre infini, toute direction issue de l'origine est une direction* (J).

On pourrait multiplier ces exemples.

Le problème de la répartition des directions (J) est actuellement à l'étude; des résultats importants ont été obtenus relativement à la comparaison du nombre de ces directions et de la rapidité de croissance du module de la fonction; relativement à l'existence de directions (J) communes à une fonction et à toutes ses dérivées ou primitives; relativement à l'existence de directions (J) pour les zéros des fonctions $f(z) - R(z)$, $R(z)$ désignant une fonction rationnelle arbitraire.

Il y a là un vaste champ de recherches. Si l'étude de la distribu-

tion des modules des zéros est très avancée, celle de la distribution des arguments, qui est plus récente, est loin d'être achevée. La première repose surtout sur l'étude de la croissance de la fonction ou de la rapidité avec laquelle elle s'approche d'une valeur donnée; la seconde repose actuellement sur l'étude des familles normales et de leurs points irréguliers, chacun de ces points jouant, par rapport à la famille, un rôle semblable à celui d'un point singulier par rapport à une fonction.



LEÇONS

SUR LES

FONCTIONS ENTIÈRES OU MÉROMORPHES

CHAPITRE I.

FONCTION CARACTÉRISTIQUE.

1. **Formule de Green.** — Considérons un domaine plan quelconque (D) limité par le contour (Γ) formé d'une ou plusieurs courbes fermées et deux fonctions $U(x, y)$ et $V(x, y)$, continues dans (D), ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres. Nous utiliserons la formule fondamentale de Green démontrée dans tous les traités d'Analyse,

$$\int_{(\Gamma)} \left(U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right) ds + \int\int_{D} (U\, \Delta V - V\, \Delta U)\, d\sigma = 0;$$

ds est l'élément d'arc de (Γ) compté géométriquement et indépendamment du sens de parcours : donc ds est toujours positif; $d\sigma$ est un élément d'aire. $\frac{d}{dn}$ indique la dérivée normale prise vers l'intérieur du domaine. Enfin, ΔU et ΔV sont les laplaciens

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2},$$

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.$$

2. **Fonction de Green relative à un point P.** — Désignons par $G(P, M)$ la valeur en un point quelconque M du domaine (D) d'une fonction qui jouit des propriétés suivantes :

1° Quand M varie, G(P, M) est une fonction harmonique dans tout le domaine (D), régulière dans tout ce domaine, sauf au point P;

2° Au voisinage du point singulier P, la fonction G(P, M) devient infinie comme $\log\frac{1}{r}$ où $r = \overline{PM}$, c'est-à-dire que $G(P, M) - \log\frac{1}{r}$ est régulière en P;

3° G(P, M) est nulle sur le contour (Γ).

Ces trois conditions entraînent l'existence d'une fonction G(P, M) et d'une seule, pour tout domaine (D) et pour tout point P intérieur à ce domaine. On l'appelle la *fonction de Green* relative au point P.

Pour démontrer son existence, remarquons que la différence

$$G_1(P, M) = G(P, M) - \log\frac{1}{r}$$

est harmonique dans tout le domaine (D) et, par définition même, elle est régulière dans tout ce domaine, y compris le point P. De plus, $G_1(P, M)$ prend sur (Γ) la suite de valeurs données : $-\log r$. Alors, en vertu du principe de Dirichlet, il existe dans le domaine (D) une fonction $G_1(P, M)$ unique. L'existence de la fonction de Green

$$G(P, M) = \log\frac{1}{r} + G_1(P, M)$$

est ainsi établie.

Donc, si l'on sait résoudre le problème de Dirichlet pour l'aire (D) limitée par le contour (Γ), on peut former la fonction de Green relative à cette aire et à un point intérieur quelconque P. *Réciproquement, si l'on connaît la fonction de Green*, G(P, M) *relative à tout point intérieur de* (D), *on peut résoudre le problème de Dirichlet pour le contour* (Γ) *et le domaine donné* (D).

En effet, cherchons une fonction U(M), harmonique et régulière dans le domaine (D), qui prenne sur le contour (Γ) la suite donnée de valeurs $U(s)$.

Appliquons la formule de Green à la fonction U et à la fonction de Green relative au point P. Comme cette dernière fonction n'est pas régulière au voisinage du point P, nous exclurons du domaine (D) les points intérieurs à un cercle (γ) de centre P et de rayon r. Le contour du nouveau domaine est donc formé par (Γ) et (γ); les deux fonctions U(M) et G(P, M) sont régulières en tous les points de ce nou-

veau domaine et l'on peut appliquer la formule de Green. Mais $\Delta U = 0$ et $\Delta G = 0$, car les deux fonctions sont harmoniques. On obtient ainsi :

$$\int_{(\Gamma)} \left(U \frac{dG}{dn} - G \frac{dU}{dn} \right) ds + \int_{(\gamma)} \left(U \frac{dG}{dn} - G \frac{dU}{dn} \right) ds = 0.$$

$G(P, M)$ est nulle, par définition, quand M décrit le contour Γ, de sorte que la relation précédente devient

$$\int_{(\Gamma)} U \frac{dG}{dn} ds + \int_{(\gamma)} \left(U \frac{dG}{dn} - G \frac{dU}{dn} \right) ds = 0.$$

D'autre part, sur le cercle (γ),

$$G(P, M) = \log \frac{1}{r} + G_1(P, M),$$

$$\frac{d\, G(P, M)}{dn} = \frac{d\, G(P, M)}{dr} = -\frac{1}{r} + \frac{d\, G_1(P, M)}{dn},$$

$$ds = r\, d\varphi.$$

Par conséquent,

$$\int_{(\gamma)} \left(U \frac{dG}{dn} - G \frac{dU}{dn} \right) ds = -\frac{1}{r} \int_0^{2\pi} U\, r\, d\varphi + \int_0^{2\pi} U \frac{d\, G_1(P, M)}{dn} r\, d\varphi$$
$$- \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} r\, d\varphi - \int_0^{2\pi} G_1 \frac{dU}{dn} r\, d\varphi.$$

Le premier terme du second membre a comme limite $-2\pi U(P)$ quand r tend vers zéro, d'après le théorème de la moyenne. Les trois dernières intégrales tendent vers zéro en même temps que r, car elles contiennent soit le facteur r, soit le facteur $r \log r$. Il s'ensuit la formule

$$(1) \qquad U(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{(\Gamma)} U(M) \frac{d\, G(P, M)}{dn} ds,$$

où le point M décrit le contour (Γ).

Cette formule permet de connaître la valeur de la fonction harmonique U en un point quelconque P de (D), si l'on connaît la fonction de Green relative au point P et la suite des valeurs prises par U sur le contour Γ. Le problème de Dirichlet est résolu. On suppose démontré que ce problème admet une solution et que cette solution est unique.

3. **Formule de Poisson-Jensen.** — Considérons une fonction $f(z)$ analytique et méromorphe dans un domaine (D) limité par le contour (Γ). On a

$$\log f(z) = \log |f(z)| + i[\arg f(z) + 2k\pi].$$

La partie réelle de $\log f(z)$, c'est-à-dire $\log |f(z)|$, est une fonction harmonique dans (D); mais elle n'est pas régulière pour tous les points de (D) : elle est discontinue pour les zéros et pour les pôles de $f(z)$.

Si a est un zéro d'ordre de multiplicité k, on a, au voisinage du point a,

$$f(z) = (z-a)^k \varphi(z),$$
$$\log |f(z)| = k \log r + \log |\varphi(z)|,$$

où $\varphi(z)$ est régulière et non nulle au voisinage de a et où $|z-a| = r$.

Mais alors

$$\log |f(z)| + k\, G(a, z) = \log |\varphi(z)| + k\, G_1(a, z)$$

est une fonction régulière au point a. Pour un pôle b, on peut faire le même calcul, l'entier k ayant une valeur négative. En appliquant ce calcul *pour tous les zéros* a_i *et pour tous les pôles* b_j de $f(z)$ dans (D), on trouve que la fonction

$$U = \log |f(z)| + \sum_i G(a_i, z) - \sum_j G(b_j, z),$$

dans laquelle chaque zéro et chaque pôle est compté autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité, est harmonique et régulière pour tous les points de (D). On peut donc lui appliquer la formule (1).

Désignons par ζ la variable qui décrit le contour (Γ). Par définition, les différentes fonctions de Green ont des valeurs $G(a_i, \zeta)$ et $G(b_j, \zeta)$ qui sont nulles. Donc, la formule (1) nous donne

$$(2) \qquad \log |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_{(\Gamma)} \log |f(\zeta)| \frac{d\,G(z, \zeta)}{dn} ds - \sum_i G(a_i, z) + \sum_j G(b_j, z).$$

Cette formule est fondamentale dans tout ce qui va suivre.

M. R. Nevanlinna l'a appelée *formule de Poisson-Jensen*. Nous verrons, en effet, que les formules de Poisson et de Jensen sont des cas particuliers de la formule précédente.

L'existence d'un zéro ou d'un pôle de $f(z)$ sur (Γ) ne change rien au résultat. En effet, soit ζ_0 un zéro de $f(z)$ situé sur (Γ). Isolons ζ_0 par un petit arc (δ) de (Γ), de milieu ζ_0 et contenu dans le cercle de centre ζ_0 et de rayon ρ. On a

$$f(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^k \varphi(\zeta),$$

où $\varphi(z)$ n'a ni zéros ni pôles à l'intérieur de (δ). Donc

$$\log|f(\zeta)| = k \log|\zeta - \zeta_0| + \log|\varphi(\zeta)|,$$

$$\int_{s'}^{s''} \log|f(\zeta)| \frac{d\,G(z, \zeta)}{dn} ds = \int_{s'}^{s''} k \log\rho \frac{dG}{dn} \rho\, d\varphi + \int_{s'}^{s''} \log|\varphi(\zeta)| \rho\, d\varphi.$$

l'intégrale étant prise le long d'un arc intérieur à (δ) et ne contenant pas ζ_0. Chaque intégrale du second membre tend vers zéro, pour ρ assez petit, car $\rho \log \rho$ tend vers zéro en même temps que ρ, et $\log|\varphi(\zeta)|$ est une fonction régulière en ζ_0. L'intégrale prise le long de (Γ) est donc convergente.

4. **Cas particulier. Formule de Poisson.** — Supposons que (Γ) soit une circonférence de centre $O(z = 0)$ et de rayon r. Soit α l'affixe d'un point à l'intérieur du cercle et $\alpha' = \frac{r^2}{\bar{\alpha}}$ son image par rapport au cercle [1]. On sait que, pour tous les points ζ qui se trouvent sur (Γ), on a

$$\frac{|\alpha|}{r} = \left|\frac{\zeta - \alpha}{\zeta - \alpha'}\right|$$

ou

$$\left|\frac{\bar{\alpha}\zeta - r^2}{r(\zeta - \alpha)}\right| = 1.$$

Par conséquent, la fonction

$$\log\left|\frac{\bar{\alpha} z - r^2}{r(z - \alpha)}\right|$$

remplit les conditions suivantes :

---

[1] La notation $\bar{\alpha}$ représente le nombre imaginaire conjugué de α.

1° Elle est harmonique dans le cercle, car c'est la partie réelle de la fonction $\log \frac{\bar{\alpha} z - r^2}{r(z-\alpha)}$. Elle est régulière dans tout le cercle, sauf au point $z = \alpha$.

2° Au voisinage du point $z = \alpha$, la fonction devient infinie comme $\log \frac{1}{|z-\alpha|}$.

3° La fonction est nulle sur (Γ), en vertu de la relation établie ci-dessus.

Il s'ensuit que la fonction considérée est la *fonction de Green* $G(\alpha, z)$ *relative au point* α, *pour l'intérieur du cercle* (D) limité par (Γ).

En appliquant au cercle (D) et à cette fonction de Green la formule (2), nous allons retrouver la formule de Poisson. On a d'abord

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \log|f(\zeta)| \frac{dG(z, \zeta)}{dn} ds$$
$$- \sum_i \log\left|\frac{\bar{a}_i z - r^2}{r(z - a_i)}\right| + \sum_j \log\left|\frac{\bar{b}_j z - r^2}{r(z - b_j)}\right|.$$

Pour calculer $\frac{dG}{dn}$ remarquons que, dans notre cas particulier, $dn = -dr$. Ensuite

$$G(z, \zeta) = \log\left|\frac{\bar{z}\zeta - r^2}{r(\zeta - z)}\right|$$

est la partie réelle de

$$\varphi(\zeta) = \log \frac{\bar{z}\zeta - r^2}{r(\zeta - z)} = G + iH.$$

G et H étant deux fonctions harmoniques conjuguées, la dérivée de G suivant une direction quelconque est égale à la dérivée de H suivant la direction directement perpendiculaire. Donc

$$\frac{dG}{ds} = \frac{dH}{dn}.$$

Comme $G = 0$ sur Γ, on a aussi

$$\frac{dG}{ds} = \frac{dH}{dn} = 0,$$

et, par conséquent,

$$\frac{d\varphi(\zeta)}{dn} = \frac{dG}{dn}.$$

Cette relation nous permet de calculer $\frac{dG}{dn}$,

$$\frac{dG}{dn} = \frac{d\varphi(\zeta)}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dn} = \varphi'(\zeta)\frac{dr\,e^{i\theta}}{dn}$$
$$= -\varphi'(\zeta)\frac{dr\,e^{i\theta}}{dr} = -\varphi'(\zeta)\,e^{i\theta} = -\varphi'(\zeta)\frac{\zeta}{r}.$$

Or, en tenant compte de l'expression de $\varphi(\zeta)$, on a successivement

$$\varphi(\zeta) = \log(\bar{z}\zeta - r^2) - \log r - \log(\zeta - z),$$
$$\varphi'(\zeta) = \frac{\bar{z}}{\bar{z}\zeta - r^2} - \frac{1}{\zeta - z},$$
$$r\frac{dG}{dn} = \frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{\bar{\zeta} - \bar{z}},$$

car ζ désigne un point de (Γ) et $\frac{r^2}{\zeta} = \bar{\zeta}$.

Mais $r\frac{dG}{dn}$ est une quantité réelle, c'est-à-dire égale à sa conjuguée. On en déduit

$$2r\frac{dG}{dn} = \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{\bar{\zeta} + \bar{z}}{\bar{\zeta} - \bar{z}},$$
$$r\frac{dG}{dn} = \mathcal{R}\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right),$$

$\mathcal{R}(u)$ désignant la partie réelle de u, de sorte que la formule de Poisson-Jensen nous donne

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_{(\Gamma)} \log|f(\zeta)|\,\mathcal{R}\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right)\frac{ds}{r}$$
$$-\sum_i \log\left|\frac{\bar{a}_i z - r^2}{r(z - a_i)}\right| + \sum_j \log\left|\frac{\bar{b}_j z - r^2}{r(z - b_j)}\right|.$$

Comme $\log|f(z)|$ est la partie réelle de $\log f(z)$, on déduit que l'on a

(3) $$\log f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\zeta)|\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\,d\theta$$
$$-\sum \log\frac{\bar{a}_i z - r^2}{r(z - a_i)} + \sum_j \log\frac{\bar{b}_j z - r^2}{r(z - b_j)} + iC,$$

C désignant une constante réelle.

La formule (3) donne une expression de la valeur d'une fonction méromorphe dans un cercle (Γ) mettant en évidence les zéros et les pôles de cette fonction.

En revenant à l'expression de $\log|f(z)|$, remarquons que l'on a, en posant $\zeta = re^{i\theta}$ et $z = \rho e^{i\varphi}$,

$$\mathcal{R}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right) = \mathcal{R}\left(\frac{r\,e^{i\theta}+\rho\,e^{i\varphi}}{r\,e^{i\theta}-\rho\,e^{i\varphi}}\right) = \frac{r^2-\rho^2}{r^2-2r\rho\cos(\varphi-\theta)+\rho^2}.$$

La formule de Poisson-Jensen pour un cercle devient donc

$$(4)\qquad \log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(r\,e^{i\theta})|\,\frac{r^2-\rho^2}{r^2-2r\rho\cos(\varphi-\theta)+\rho^2}\,d\theta$$
$$-\sum_i \log\left|\frac{\overline{a_i}\,z-r^2}{r(z-a_i)}\right| + \sum_j \log\left|\frac{\overline{b_j}\,z-r^2}{r(z-b_j)}\right|.$$

En particulier, si $f(z)$ n'a ni zéros ni pôles à l'intérieur du cercle (Γ), $\log|f(z)|$ est une fonction harmonique U régulière dans le cercle. Les sommes disparaissent car il n'y a ni zéro a_i ni pôle b_j, et la formule (4) prend la forme donnée par Poisson :

$$(5)\qquad \mathrm{U}(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{U}(r,\theta)\,\frac{r^2-\rho^2}{r^2-2r\rho\cos(\varphi-\theta)+\rho^2}\,d\theta.$$

5. **Second cas particulier. Formule de Jensen.** — Considérons toujours comme domaine (D) le cercle de centre O et de rayon r. Supposons que la fonction $f(z)$ ne soit ni nulle ni infinie à l'origine. Alors, en appliquant la formule (4) à la fonction $f(z)$, pour $z = 0$, on obtient

$$(6)\quad \log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(r\,e^{i\theta})|\,d\theta - \sum_i \log\frac{r}{|a_i|} + \sum_j \log\frac{r}{|b_j|}.$$

C'est la formule bien connue de Jensen. La formule de Poisson-Jensen (2) contient donc comme cas particuliers les formules de Poisson et de Jensen.

On doit modifier légèrement la formule (6) lorsque l'origine est un pôle ou un zéro pour $f(z)$. Supposons que l'origine soit un pôle d'ordre k de $f(z)$. On peut écrire

$$f(z) = \frac{\lambda_{-k}}{z^k} + \frac{\lambda_{-k+1}}{z^{k-1}} + \ldots + \frac{\lambda_{-1}}{z} + \lambda_0 + \lambda_1 z + \ldots.$$

Donc, la fonction $z^k f(z) = \varphi(z)$ est régulière et non nulle à l'origine ; on peut lui appliquer la formule (6), il vient ainsi

$$\log|\lambda_{-k}| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\log|f(re^{i\theta})| + k\log r]\,d\theta$$
$$-\sum_i \log\frac{r}{|a_i|} + \sum_j \log\frac{r}{|b_j|}.$$

Donc, en définitive,

$$\log|\lambda_{-k}| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta$$
$$-\sum_i \log\frac{r}{|a_i|} + \sum_j \log\frac{r}{|b_j|} + k\log r.$$

Si l'origine était un zéro d'ordre h de $f(z)$, un calcul analogue montre que l'on a

$$\log|\lambda_h| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta$$
$$-\sum_i \log\frac{r}{|a_i|} + \sum_j \log\frac{r}{|b_j|} - h\log r.$$

On peut conserver dans tous les cas la formule (6) à condition de remplacer par $\log\frac{r}{1}$ les termes des sommes correspondant à un zéro ou à un pôle placé à l'origine et d'écrire au premier membre $\log|c|$, c désignant une constante.

6. **Définitions.** — On désignera par $\overset{+}{A}$ le nombre $\frac{A + |A|}{2}$; on a donc

$$\overset{+}{A} = A \qquad \text{si } A \geqq 0,$$
$$\overset{+}{A} = 0 \qquad \text{si } A \leqq 0.$$

Alors

$$\overset{+}{\log}|u| = \log|u| \qquad \text{pour } |u| \geqq 1,$$
$$\overset{+}{\log}|u| = 0 \qquad \text{pour } |u| \leqq 1.$$

Voici quelques inégalités relatives aux $\overset{+}{\log}$. — 1° *On a*

$$\overset{+}{\log}(\alpha_1 + \alpha_2) \leqq \overset{+}{\log}(\alpha_1) + \overset{+}{\log}(\alpha_2) + \log 2$$

et, en général,

$$\overset{+}{\log}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p) \leqq \overset{+}{\log}\alpha_1+\overset{+}{\log}\alpha_2+\ldots+\overset{+}{\log}\alpha_p+\log p.$$

Les α_i sont des nombres positifs. En effet, supposons $\alpha_1 \leqq \alpha_2$. On a

$$\log(\alpha_1+\alpha_2) \leqq \log 2\alpha_2 = \log 2+\log\alpha_2.$$

Si $\alpha_2 \geqq 1$, cette inégalité peut s'écrire aussi

$$\overset{+}{\log}(\alpha_1+\alpha_2) \leqq \overset{+}{\log}\alpha_2+\log 2.$$

Si $\alpha_2 < 1$, on a

$$\alpha_1+\alpha_2 < 2 \quad \text{et} \quad \overset{+}{\log}\alpha_2 = 0.$$

Donc, encore :

$$\overset{+}{\log}(\alpha_1+\alpha_2) \leqq \overset{+}{\log}\alpha_2+\log 2.$$

On ne peut que renforcer le second membre, en ajoutant $\overset{+}{\log}\alpha_1$. Donc, on a finalement

$$\overset{+}{\log}(\alpha_1+\alpha_2) \leqq \overset{+}{\log}\alpha_1+\overset{+}{\log}\alpha_2+\log 2.$$

L'inégalité du cas général s'établit par un calcul analogue.

2° *On a*

$$\overset{+}{\log}(\alpha_1\alpha_2) \leqq \overset{+}{\log}\alpha_1+\overset{+}{\log}\alpha_2,$$

et, en général,

$$\overset{+}{\log}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p) \leqq \overset{+}{\log}\alpha_1+\overset{+}{\log}\alpha_2+\ldots+\overset{+}{\log}\alpha_p.$$

En effet,

$$\log(\alpha_1\alpha_2) = \log\alpha_1+\log\alpha_2.$$

Supposons encore $\alpha_1 \leqq \alpha_2$. Si $\alpha_1 \geqq 1$, la relation précédente s'écrit

$$\overset{+}{\log}(\alpha_1\alpha_2) = \overset{+}{\log}\alpha_1+\overset{+}{\log}\alpha_2.$$

Mais si $\alpha_1 \leqq 1$, on a $\alpha_1\alpha_2 \leqq \alpha_2$ et

$$\log(\alpha_1\alpha_2) \leqq \log\alpha_2,$$

de sorte que

$$\overset{+}{\log}(\alpha_1\alpha_2) \leqq \overset{+}{\log}\alpha_2,$$

et, *a fortiori*,

$$\overset{+}{\log}(\alpha_1\alpha_2) \leqq \overset{+}{\log}\alpha_1 + \overset{+}{\log}\alpha_2.$$

Le cas général se démontre par induction.

7. Formule de M. R. Nevanlinna. — M. Nevanlinna a partagé l'intégrale de la formule (6) de Jensen en deux parties. Sur la circonférence, $\log|f(z)|$ est tantôt positif, tantôt négatif, suivant que $|f(z)|$ est plus grand ou plus petit que l'unité. Soient s l'ensemble des arcs du contour où $|f(z)| \geqq 1$ et s' l'ensemble des arcs où $|f(z)| \leqq 1$. On a

$$\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta = \int_s \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta + \int_{s'} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta.$$

Or,

$$\int_s \log|f(z)|\,d\theta = \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(z)|\,d\theta,$$

$$\int_{s'} \log|f(z)|\,d\theta = -\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(z)}\right|d\theta.$$

Avec ces notations, la formule de Jensen s'écrit

$$(7)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(z)|\,d\theta + \sum_j \log\frac{r}{|b_j|}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(z)}\right|d\theta + \sum_i \log\frac{r}{|a_i|} + \log|c|.$$

La première intégrale est la valeur moyenne de $\overset{+}{\log}|f(z)|$ sur la circonférence de rayon r. On peut la désigner de la façon suivante :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(z)|\,d\theta = m(r, f) = m(r, \infty),$$

ou encore $m(r)$, si l'on ne craint pas d'ambiguïté; $m(r)$ est une fonction continue de r, comme on le voit facilement. De la même manière,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(z)}\right|d\theta = m\left(r, \frac{1}{f}\right) = m(r, 0).$$

Posons encore, avec M. Nevanlinna,

$$\sum_j \log \frac{r}{|b_j|} = \mathrm{N}(r, f) = \mathrm{N}(r, \infty) = \mathrm{N}(r),$$

$$\sum_i \log \frac{r}{|a_i|} = \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = \mathrm{N}(r, 0),$$

où les sommes sont étendues aux pôles b_j ou aux zéros a_i intérieurs au cercle de rayon r; $\mathrm{N}(r)$ est évidemment une fonction continue de r. La formule (7) peut donc s'écrire

$$m(r, \infty) + \mathrm{N}(r, \infty) = m(r, 0) + \mathrm{N}(r, 0) + \log|c|. \tag{8}$$

C'est la *formule de M. Nevanlinna*. Elle est, au fond, une formule d'équilibre. En effet, laissons fixe le rayon r. Plus la longueur totale des arcs où $|f(z)|$ est grand est considérable, plus grande est la valeur moyenne $m(r, \infty)$, et $\mathrm{N}(r, \infty)$ est d'autant plus grand qu'il y a plus de pôles de $f(z)$ à l'intérieur du cercle. De même, si la longueur totale des arcs où $f(z)$ est voisin de zéro est grande, la valeur moyenne $m\left(r, \frac{1}{f}\right) = m(r, 0)$ est grande et $\mathrm{N}(r, 0)$ est d'autant plus grand que $f(z)$ a plus de zéros dans le cercle. La formule de M. Nevanlinna exprime donc qu'il y a équilibre, à une constante près, entre la façon dont $f(z)$ s'approche de zéro sur la circonférence et le nombre de fois qu'elle atteint zéro à l'intérieur du cercle d'une part, entre la façon dont $f(z)$ s'approche de l'infini sur la circonférence et le nombre de fois qu'elle devient infinie dans le cercle, d'autre part.

En réalité, il y a plus. Le théorème fondamental de M. Nevanlinna exprime, comme nous le verrons au paragraphe suivant, qu'il y a équilibre, d'une part, entre la façon dont $f(z)$ s'approche d'une valeur quelconque a sur le contour et le nombre de fois qu'elle prend la valeur a à l'intérieur du cercle; d'autre part, entre l'expression analogue pour une autre valeur quelconque b. En d'autres termes, plus une fonction s'approche rapidement d'une valeur a sur la circonférence, moins de fois elle atteint la valeur a à l'intérieur du cercle.

M. Nevanlinna a appelé *fonction caractéristique* de f la fonction

continue de r définie par

$$T(r, f) = T(r, \infty) = T(r) = m(r, f) + N(r, f)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(re^{i\theta})|\,d\theta + \sum_i \log\frac{r}{|b_i|}.$$

La formule (8) peut s'énoncer, grâce à cette nouvelle notation, de la manière suivante :

$T(r, f)$ *est égal, à une constante près, à* $T\left(r, \frac{1}{f}\right)$.

8. **Théorème fondamental de M. R. Nevanlinna.** — On généralise facilement les résultats précédents. Posons

$$m(r, a) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(re^{i\theta})-a}\right| d\theta,$$
$$N(r, a) = \sum_k \log\frac{r}{|c_k|},$$

où les c_k désignent les racines intérieures au cercle de rayon r de l'équation

$$f(z) = a,$$

et

$$T(r, a) = m(r, a) + N(r, a) = T\left(r, \frac{1}{f-a}\right).$$

On peut établir la proposition suivante :

Théorème. — *La fonction* $T(r, a)$ *est égale à* $T(r, \infty)$, *à une fonction bornée additive près.*

D'après la formule (8), $T\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ diffère d'une constante de $T(r, f-a)$. Donc, nous pouvons nous occuper de cette dernière fonction. D'abord, les pôles de $f-a$ sont les mêmes que les pôles de f. Donc,

$$N(r, f-a) = N(r, f).$$

En second lieu,

$$|f-a| \leqq |f| + |a|.$$

Donc, en vertu des inégalités établies au n° 6,

$$\overset{+}{\log}|f-a| \leqq \overset{+}{\log}|f| + \overset{+}{\log}|a| + \log 2,$$
$$\overset{+}{\log}|f-a| - \overset{+}{\log}|f| \leqq \overset{+}{\log}|a| + \log 2.$$

De la même manière,

$$f = (f - a) - a.$$

$$\overset{+}{\log}|f| \leq \overset{+}{\log}|f - a| + \overset{+}{\log}|a| + \log 2,$$

$$\overset{+}{\log}|f| - \overset{+}{\log}|f - a| \leq \overset{+}{\log}|a| + \log 2.$$

En définitive,

$$\left|\overset{+}{\log}|f - a| - \overset{+}{\log}|f|\right| \leq \overset{+}{\log}|a| + \log 2.$$

Il s'ensuit

$$|m(r, f - a) - m(r, f)| \leq \overset{+}{\log}|a| + \log 2.$$

On a donc

$$m(r, f - a) = m(r, f) + b(r),$$

$b(r)$ désignant une fonction bornée quel que soit r et, en ajoutant membre à membre à l'égalité

$$N(r, f - a) = N(r, f),$$

on obtient

$$T(r, f - a) = T(r, f) + b(r),$$

d'où

$$T(r, a) = T(r, f) + B(r),$$

$b(r)$ désignant une nouvelle fonction de r qui demeure bornée lorsque r croît indéfiniment.

Lorsqu'il s'agit d'une fonction bien déterminée f, on désigne souvent $T(r, f)$ par la notation abrégée $T(r)$.

9. **Exemples et applications.** — Quand $f(z)$ se réduit à la constante c,

$$N(r, a) = 0 \qquad \text{si } a \neq c.$$

Mais si $a = c$, on a toujours $\frac{1}{f(z) - a} = \infty$; donc $m(r, a) = \infty$ et $N(r, a)$ n'a pas de sens dans ce cas. Nous écarterons donc les constantes de nos calculs.

Calcul de $T(r)$ *pour* e^z. — La fonction e^z n'a pas de pôles, donc $N(r, f)$ disparaît et il reste

$$T(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|e^z|\, d\theta.$$

Si $z = x + iy$, on a $|e^z| = e^x$ et $\overset{+}{\log}|e^z| = x$. Par suite, $\log|e^z|$ est égal

à x si $x > 0$ et s'annule si $x \leq 0$. Il en résulte

$$T(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\, d\theta = \frac{r}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = \frac{r}{\pi}.$$

Calcul de T(r) *pour les fractions rationnelles.* — Soit

$$f(z) = \frac{a z^m + a' z^{m-1} + \ldots}{b z^n + b' z^{n-1} + \ldots},$$

et supposons, pour fixer les idées, $m > n$. On peut alors mettre $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = z^{m-n}\,\frac{a + \dfrac{a'}{z} + \ldots}{b + \dfrac{b'}{z} + \ldots}.$$

$f(z)$ tend vers l'infini avec z; donc pour r assez grand, $|f(z)|$ est plus grand que 1, et $\overset{+}{\log}\,|f(z)|$ se réduit à $\log|f(z)|$. On aura

$$m(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (m - n)\log r\, d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|\frac{a}{b} + \varepsilon\right| d\theta,$$

où ε tend vers zéro quand r tend vers l'infini. Il s'ensuit que la seconde intégrale est une fonction bornée de $r : b_1(r)$, de sorte que

$$m(r) = (m - n)\log r + b_1(r).$$

D'autre part,

$$N(r) = \log\frac{r}{|b_1|} + \log\frac{r}{|b_2|} + \ldots + \log\frac{r}{|b_n|},$$

car $f(z)$ n'a que n pôles b_j dans tout le plan. Alors

$$N(r) = n\log r + b_2(r),$$

où $b_2(r)$ est une fonction bornée. En définitive,

$$T(r) = m(r) + N(r) = m\log r + b(r),$$

$b(r)$ désignant une nouvelle fonction bornée, et

$$\lim_{r=\infty}\frac{T(r)}{\log r} = m.$$

Un calcul analogue montre que si $n \geq m$, la limite du rapport $\dfrac{T(r)}{\log r}$, quand r tend vers l'infini, est n.

$T(r)$ est donc comparable à $\log r$ dans le cas des fractions rationnelles. Cette propriété, comme nous le verrons, caractérise les fractions rationnelles.

10. Propriétés de la fonction caractéristique. — 1° $T(r)$ *est une fonction croissante de* r.

Il faut démontrer que, si $r < r'$, on a $T(r) \leqq T(r')$.

Au n° 4, nous avons établi la formule (4), qui donne la valeur de $\log |f(z)|$ en un point z en fonction des valeurs de $f(z)$ sur le contour, des pôles et des zéros intérieurs au domaine. Appliquons cette formule en prenant comme contour la circonférence de rayon r'. On a

$$\log |f(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(r'e^{i\varphi})| \frac{r'^2 - r^2}{r'^2 - 2rr'\cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi$$
$$- \sum_i \log \left| \frac{\bar{a}_i z - r'^2}{r'(z - a_i)} \right| + \sum_j \log \left| \frac{\bar{b}_j z - r'^2}{r'(z - b_j)} \right|,$$

où les sommes sont étendues aux zéros et aux pôles intérieurs au domaine; on a donc

$$|a_i| < r', \qquad |b_j| < r'.$$

On a posé, en outre,

$$z = re^{i\theta},$$

sur la circonférence (C) de rayon r;

$$\zeta = r'e^{i\varphi},$$

sur la circonférence (C′) de rayon r'.

Les expressions $\log \left| \frac{\bar{a}_i z - r'^2}{r'(z - a_i)} \right|$ sont des fonctions de Green pour des points intérieurs au cercle de rayon r'. Donc, leurs valeurs sont positives et l'on peut écrire

$$(9) \quad \overset{+}{\log} |f(re^{i\theta})| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |f(r'e^{i\varphi})| \frac{r'^2 - r^2}{r'^2 - 2rr'\cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi$$
$$+ \sum_i \log \left| \frac{\bar{b}_j z - r'^2}{r'(z - b_j)} \right|.$$

Pour avoir $m(r)$, il faut prendre la valeur moyenne, sur le cercle de rayon r, de $\overset{+}{\log} |f(re^{i\theta})|$. Il s'ensuit que $m(r)$ est inférieure ou

égale à la valeur moyenne du second membre de l'inégalité précédente, c'est-à-dire à la somme des valeurs moyennes des termes.

Le premier terme est une fonction $U(z)$, harmonique et régulière dans le cercle de rayon r' et prenant sur la circonférence les valeurs $\overset{+}{\log}|f(r'e^{i\varphi})|$, d'après la formule (5) de Poisson (nº 4). D'après la formule de Gauss, sa valeur moyenne est égale à $U(0)$. Or,

$$U(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(r'e^{i\varphi})|\,d\varphi = m(r').$$

Soient $b_1, b_2, \ldots, b_n$, les pôles de $f(z)$, de module inférieur ou égal à r, et $b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots, b_{n'}$, les pôles dont le module est compris entre r et r'. On a

$$\sum_j \log\left|\frac{\overline{b_j}z - r'^2}{r'(z-b_j)}\right| = \sum_{j=1}^{n} \log\left|\frac{\overline{b_j}z - r'^2}{r'(z-b_j)}\right| + \sum_{j=n+1}^{n'} \log\left|\frac{\overline{b_j}z - r'^2}{r'(z-b_j)}\right|.$$

On peut écrire, lorsque z est sur la circonférence (C) de rayon r,

$$\sum_{j=1}^{n} \log\left|\frac{\overline{b_j}z - r'^2}{r'(z-b_j)}\right| = \sum_{j=1}^{n}\left[\log\left|\frac{\overline{b_j}z - r'^2}{r'(z-b_j)}\right| - \log\left|\frac{\overline{b_j}z - r^2}{r(z-b_j)}\right|\right],$$

puisque les termes ajoutés sont des fonctions de Green pour des points intérieurs au cercle (C), donc nulles sur la circonférence. Or, chaque terme entre crochets est harmonique et régulier dans (C), puisque le pôle b_j disparaît dans la différence. Donc, en vertu de la formule de Gauss, la valeur moyenne sur (C) de la somme est égale à la valeur au centre, c'est-à-dire à la valeur pour $z = 0$, soit

$$\sum_1^n \log\frac{r'}{|b_j|} - \sum_1^n \log\frac{r}{|b_j|}.$$

Enfin, la somme

$$\sum_{j=n+1}^{n'} \log\left|\frac{\overline{b_j}z - r'^2}{r'(z-b_j)}\right|$$

est une fonction harmonique et régulière dans (C) puisque $|b_j| > r$, pour $j \geqq n+1$. Sa valeur moyenne est la valeur au centre, soit

$$\sum_{j=n+1}^{n'} \log\frac{r'}{|b_j|}.$$

En tenant compte de toutes ces valeurs moyennes, l'inégalité (9) donne

$$m(r) \leqq m(r') + \sum_{1}^{n'} \log \frac{r'}{|b_j|} - \sum_{1}^{n} \log \frac{r}{|b_j|}$$

ou

$$m(r) + N(r) \leqq m(r') + N(r'),$$

c'est-à-dire

$$T(r) \leqq T(r').$$

La propriété est démontrée.

2° $T(r)$ *n'est bornée que si la fonction correspondante* $f(z)$ *est constante.*

Remarquons d'abord que $m(r)$ est toujours positive ou nulle; donc, si $N(r)$ augmente indéfiniment, la somme $T(r) = m(r) + N(r)$ n'est pas bornée. Or,

$$N(r) = \sum_{j} \log \frac{r}{|b_j|} = n \log r - \sum_{j} \log |b_j|,$$

en supposant que $f(z)$ ait n pôles de modules inférieurs à r. En d'autres termes :

Si $|b_1| \leqq r < |b_2|$, on a

$$N(r) = \log r - \log |b_1|;$$

Si $|b_2| \leqq r < |b_3|$, on a

$$N(r) = 2 \log r - \log |b_1| - \log |b_2|;$$

Si $|b_3| \leqq r < |b_4|$, on a

$$N(r) = 3 \log r - \log |b_1| - \log |b_2| - \log |b_3|;$$

. . . .

Il est évident que si l'on prend $\log r$ comme variable indépendante, la fonction $N(r)$ est représentée par une ligne brisée convexe, dont la pente va en croissant. En effet, celle-ci est 1 dans l'intervalle $\log |b_1|$, $\log |b_2|$; elle devient 2 dans l'intervalle suivant, et ainsi de suite. Donc, dès que $f(z)$ a un pôle b_1, la fonction $N(r)$ ne peut pas rester bornée; elle augmente indéfiniment avec $\log r$. Par conséquent, la

fonction caractéristique $T(r)$, somme d'une fonction $N(r)$ qui augmente indéfiniment et d'une fonction toujours positive $m(r)$, augmente indéfiniment dès que $f(z)$ a un pôle.

De la même manière, $T\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ augmente indéfiniment dès que $\frac{1}{f-a}$ a un pôle, c'est-à-dire dès que $f(z)-a$ a un zéro. Mais, en vertu du théorème fondamental de M. Nevanlinna, $T(r, f)$ et $T\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ diffèrent par une fonction bornée. Ceci entraîne que $T(r)$ augmente indéfiniment aussi dans le cas où $f(z)-a$ a un zéro quel que soit a.

Il en résulte que, si $f(z)$ ne se réduit pas à une constante, $T(r)$ ne peut pas être bornée.

Le raisonnement précédent est valable même si l'origine est un pôle d'ordre k de $f(z)$. Il suffit de remplacer par l'unité les k premières valeurs de b_j.

3° *La fonction caractéristique* $T(r)$ *est invariante, à une fonction bornée près, pour toutes les transformations homographiques à coefficients constants effectuées sur* $f(z)$.

En d'autres termes, les fonctions $T(r, f)$ et $T\left(r, \frac{\alpha f+\beta}{\gamma f+\delta}\right)$ diffèrent par une fonction bornée, α, β, γ, δ désignant des constantes telles que $\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$.

Établissons d'abord cette propriété pour le cas particulier où l'on transforme f en kf, k désignant une constante. Considérons donc $T(r, kf)$. Les pôles de f et de kf étant les mêmes, on a évidemment,

$$N(r, kf) = N(r, f).$$

En second lieu,

$$\overset{+}{\log}|kf| \leqq \overset{+}{\log}|f| + \overset{+}{\log}|k|,$$

$$\overset{+}{\log}|f| \leqq \overset{+}{\log}|kf| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{k}\right|.$$

Donc

$$\left|\overset{+}{\log}|kf| - \overset{+}{\log}|f|\right| \leqq \overset{+}{\log} k + \overset{+}{\log}\frac{1}{k},$$

et le premier membre est borné. En prenant les valeurs moyennes, cette inégalité donne immédiatement

$$|m(r, kf) - m(r, f)| \leqq \overset{+}{\log} k + \overset{+}{\log}\frac{1}{k}.$$

Par conséquent

$$m(r, kf) = m(r, f) + b(r),$$

où $b(r)$ désigne une fonction bornée. Finalement,

$$\mathrm{N}(r, kf) + m(r, kf) = \mathrm{N}(r, f) + m(r, f) + b(r),$$
$$\mathrm{T}(r, kf) = \mathrm{T}(r, f) + b(r),$$

ce qui démontre la proposition dans ce cas particulier.

Passons au cas général. Toute homographie est une combinaison de translations, inversions et homothéties, c'est-à-dire de transformations de f en $f + a$, de f en $\frac{1}{f}$ ou de f en kf. Nous venons de voir que $\mathrm{T}(r, kf)$ diffère par une fonction bornée de $\mathrm{T}(r, f)$; le théorème fondamental de M. Nevanlinna montre que la différence

$$\mathrm{T}(r, f + a) - \mathrm{T}(r, f)$$

est aussi bornée. Enfin $\mathrm{T}(r, f) - \mathrm{T}\left(r, \frac{1}{f}\right)$ est une constante (n° 7). Il s'ensuit que toute transformation homographique de $f(z)$ ne fait varier $\mathrm{T}(r)$ que d'une quantité bornée.

4° *On a*

$$\mathrm{T}(r, fg) \leqq \mathrm{T}(r, f) + \mathrm{T}(r, g).$$

En effet, soit b un pôle de fg, d'ordre k. Il est évident que b doit être un pôle soit de f, soit de g, soit de f et de g en même temps et la somme des ordres de multiplicité du pôle b de f et du pôle b de g est précisément k. Donc tout pôle du produit est pôle pour un facteur au moins. Mais inversement, il est possible que c soit un pôle pour f et un zéro pour g, de sorte qu'il soit un point ordinaire pour le produit fg. Il s'ensuit que

$$(\alpha) \qquad \mathrm{N}(r, fg) \leqq \mathrm{N}(r, f) + \mathrm{N}(r, g).$$

En second lieu

$$\overset{+}{\log} |fg| \leqq \overset{+}{\log} |f| + \overset{+}{\log} |g|$$

et, en prenant les valeurs moyennes,

$$(\beta) \qquad m(r, fg) \leqq m(r, f) + m(r, g).$$

En ajoutant membre à membre les inégalités (α) et (β), on obtient

précisément

$$T(r, fg) \leqq T(r, f) + T(r, g).$$

5° On doit à M. T. Shimizu une propriété de $T(r)$ qui permet d'en donner une définition d'origine géométrique [1].

Supposons qu'on fasse la projection stéréographique du plan de la variable $Z = f(z)$ sur une sphère de Riemann; lorsque z décrit une région du plan des z, le point P, image de Z sur la sphère, décrit une surface sphérique composée d'un ou de plusieurs feuillets. Désignons par $A_1(r)$, l'aire de cette surface sphérique, mesurée en prenant comme unité l'aire de la sphère, lorsque le point z décrit le cercle $|z| \leqq r$.

La fonction $T(r)$ et la fonction $A_1(r)$ peuvent être considérées comme des fonctions de la variable $\log r$. M. T. Shimizu a démontré que : $T(r)$ *ne diffère que par une fonction bornée d'une primitive de* $A_1(r)$ *par rapport à la variable* $\log r$.

Si l'on écrit

$$A_1(r) = b(r) + n(r),$$

$n(r)$ désignant le nombre des pôles de module inférieur à r : $m(r)$ *ne diffère que par une fonction bornée d'une primitive de* $b(r)$ *par rapport à* $\log r$.

---

[1] T. Shimizu, *On the Theory of Meromorphic Functions* (*Japanese Journal of Mathematics*, vol. VI, 1929, p. 119-171).



CHAPITRE II.

CLASSIFICATION DES FONCTIONS ENTIÈRES OU MÉROMORPHES.

11. **Comparaison entre $T(r)$ et $M(r)$.** — Désignons par $M(r)$ le maximum du module de $f(z)$ sur la circonférence de rayon r et de centre origine. La croissance de la fonction $M(r)$ permet d'établir une classification des *fonctions entières* $f(z)$. Cette fonction $M(r)$ a servi comme élément fondamental de la classification des fonctions entières avant l'introduction de la fonction caractéristique $T(r)$. Mais $T(r)$, tout en rendant les mêmes services que $M(r)$ pour les fonctions entières, permet d'étendre la classification aux *fonctions méromorphes*. Dans ce cas, $M(r)$ est évidemment infini si la circonférence de rayon r passe par un pôle de la fonction méromorphe; ce n'est plus une fonction croissante de r.

Pour les fonctions entières, la croissance de $T(r)$ *est comparable à celle de* $\log M(r)$.

En effet, pour les fonctions entières, il n'y a pas de pôles b_j, donc

$$T(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(re^{i\theta})|\,d\theta.$$

Or

$$|f(re^{i\theta})| \leqq M(r).$$

Donc

$$T(r) \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} M(r)\,d\theta = \log M(r),$$

pour r assez grand.

Considérons, en second lieu, la formule de Poisson-Jensen, en prenant pour z le point de module r où $|f(z)|$ est maximum et en prenant comme contour d'intégration la circonférence de rayon $R > r$.

On a

$$\log M(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(R\,e^{i\varphi})|\,\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2}\,d\varphi$$
$$-\sum_i \log\left|\frac{\bar{a}_i z - R^2}{R(z-a_i)}\right|,$$

puisqu'il n'y a pas de pôles. La somme s'étend à tous les zéros de $f(z)$ intérieurs au cercle de rayon R. Mais $\log\left|\frac{\bar{a}_i z - R^2}{R(z-a_i)}\right|$ est une fonction de Green relative au cercle de rayon R et au point a_i, elle est harmonique et nulle sur le contour, elle est donc positive à l'intérieur puisqu'elle est égale à $+\infty$ au point a_i. Il s'ensuit que tous les termes sous le signe Σ sont positifs et que l'on peut écrire

$$\log M(r) \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(R\,e^{i\varphi})|\,\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)+r^2}\,d\varphi$$
$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(R\,e^{i\varphi})|\,\frac{R+r}{R-r}\,d\varphi$$

ou

$$\log M(r) \leqq \frac{R+r}{R-r}\,T(R).$$

Prenons, pour fixer les idées, $R = 2r$. On déduit

$$\log M(r) \leqq 3\,T(2r).$$

Donc, en définitive,

$$T(r) \leqq \log M(r) \leqq 3\,T(2r).$$

Cette double inégalité montre que $T(r)$ et $\log M(r)$ ont des croissances comparables. On le verra d'une manière précise au paragraphe 14.

12. **Cas des polynomes et des fractions rationnelles.** — *Parmi toutes les fonctions entières, les polynomes seuls jouissent de la propriété que le rapport* $\frac{T(r)}{\log r}$ *est borné. Sa limite, pour* $r = \infty$, *est égale au degré du polynome.*

Parmi toutes les fonctions méromorphes, les fractions rationnelles seules jouissent de la propriété que le rapport $\frac{T(r)}{\log r}$ *est borné.*

La limite de ce rapport, pour $r = \infty$, est égale au degré de la fraction rationnelle, c'est-à-dire au plus grand des degrés du numérateur et du dénominateur.

Le résultat demeure exact si le rapport n'est supposé borné que pour une infinité de valeurs de r croissant indéfiniment.

Soit le polynome

$$P(z) = a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \ldots + a_p = z^p \Phi\left(\frac{1}{z}\right).$$

On peut prendre r assez grand pour que $|P(z)| > 1$, de sorte que $\overset{+}{\log}$ se confond avec log et

$$T(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left| z^p \Phi\left(\frac{1}{z}\right)\right| d\theta = p \log r + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|\Phi\left(\frac{1}{z}\right)\right| d\theta.$$

L'intégrale du dernier membre est bornée. Il s'ensuit que

$$\lim_{r=\infty} \frac{T(r)}{\log r} = p.$$

Donc, si $f(z)$ est un polynome, le rapport $\frac{T(r)}{\log r}$ est borné. Réciproquement, si le rapport $\frac{T(r)}{\log r}$ est borné, la fonction *entière* $f(z)$ est un polynome.

On a, en effet,

$$\log M(r) \leqq 3\,T(2r),$$

$$\frac{\log M(r)}{\log r} \leqq 3 \frac{T(2r)}{\log 2r}\,\frac{\log 2r}{\log r}.$$

Dans le second membre de cette inégalité, $\frac{T(2r)}{\log 2r}$ est borné par hypothèse, $\frac{\log 2r}{\log r}$ est borné et tend vers 1 quand r tend vers l'infini. Par conséquent, le second membre est borné et

$$\frac{\log M(r)}{\log r} \leqq p,$$

$$(\gamma) \qquad M(r) \leqq r^p.$$

Cette dernière inégalité entraîne, en vertu d'une extension du théorème de Liouville, que $f(z)$ est un polynome de degré au plus égal à p. En effet, $f(z)$ étant une fonction entière par hypothèse,

peut être développée en série $\Sigma a_n z^n$ dans tout le plan. Or, les inégalités de Cauchy

$$|a_n| < \frac{M(r)}{r^n}$$

entraînent, en tenant compte de (γ), et en faisant croître r indéfiniment,

$$a_n = 0 \qquad (n = p+1, p+2, \ldots).$$

Le développement se réduit aux $p+1$ premiers termes. $f(z)$ est bien un polynome de degré inférieur ou égal à p.

Le résultat demeure exact lorsque le rapport $\frac{T(r)}{\log r}$ n'est borné que pour une infinité de valeurs de r croissant indéfiniment; l'inégalité (γ) n'est alors vérifiée que pour ces valeurs, mais les inégalités de Cauchy entraînent la même conclusion.

Passons au cas des fonctions méromorphes. Nous avons montré, au n° 9, que, pour les fractions rationnelles

$$f(z) = \frac{a z^m + a' z^{m-1} + \ldots}{b z^n + b' z^{n-1} + \ldots},$$

le rapport $\frac{T(r)}{\log r}$ tend, pour $r = \infty$, vers m ou vers n suivant que $m \geqq n$ ou $m \leqq n$.

Réciproquement, supposons que le rapport $\frac{T(r)}{\log r}$ relatif à une fonction méromorphe soit borné; on peut écrire

$$T(r) = m(r) + N(r) < A \log r,$$

A désignant une constante. Comme $m(r)$ est une fonction positive, on a

$$N(r) < A \log r.$$

Or, nous avons vu, dans la démonstration de la deuxième propriété du n° 10, que, si l'on représente graphiquement $N(r)$ comme fonction de $\log r$, on obtient une ligne brisée convexe, dont la pente est d'autant plus raide qu'il y a plus de pôles. Comme A est une quantité finie, il s'ensuit que dans notre cas particulier, on ne peut pas avoir une infinité de pôles. Soient

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_n,$$

ces pôles, en nombre fini. Posons

$$g(z) = (z - b_1)(z - b_2)\dots(z - b_n).$$

$g(z)$ est un polynome; donc

$$T(r, g) < B \log r,$$

B désignant une constante.

Comme nous avons, par hypothèse

$$T(r, f) < A \log r,$$

on déduit, d'après la quatrième propriété du n° **10**,

$$T(r, fg) < (A + B) \log r.$$

Or, la fonction fg n'a pas de pôles, car $g(z)$ admet comme zéros précisément les pôles de $f(z)$, avec les mêmes degrés de multiplicité. fg est alors une fonction entière et $\frac{T(r, fg)}{\log r}$ est borné. Il s'ensuit que fg est un polynome dont le degré m ne dépasse pas $A + B$, soit

$$fg = (z - a_1)(z - a_2)\dots(z - a_m).$$

On obtient, finalement,

$$f(z) = \frac{(z - a_1)(z - a_2)\dots(z - a_m)}{(z - b_1)(z - b_2)\dots(z - b_n)}.$$

C'est une fraction rationnelle.

Le résultat demeure exact lorsque le rapport $\frac{T(r)}{\log r}$ n'est borné que pour une infinité de valeurs de r croissant indéfiniment. En effet, si la fonction avait une infinité de pôles, le rapport $\frac{N(r)}{\log r}$ augmenterait indéfiniment puisque, la ligne brisée représentant $N(r)$ demeurant au-dessus de la demi-droite formée par le prolongement de ces côtés, on a, quel que soit l'entier n,

$$N(r) > n \log r + C$$

lorsque $r > |b_n|$, donc

$$\frac{N(r)}{\log r} > n - 1,$$

pour r assez grand.

13. Classification des fonctions entières au moyen de $M(r)$ [1]. — Comparons la croissance de $\log\log M(r)$ à celle de $\log r$. Deux cas peuvent se présenter : 1° Ou bien

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log\log M(r)}{\log r}$$

est infinie. On dit alors que $f(z)$ est une fonction entière d'*ordre infini*. 2° Ou bien cette plus grande limite est finie et égale à ρ. Dans ce dernier cas, on dit que $f(z)$ est une fonction d'*ordre fini* ρ.

Considérons une fonction d'ordre fini ρ. Pour r suffisamment grand, on a

$$\frac{\log\log M(r)}{\log r} < \rho + \varepsilon$$

car, ρ désignant la plus grande limite du premier membre, il n'y a qu'un intervalle fini de valeurs de r pour lesquelles ce premier membre est supérieur à $\rho + \varepsilon$. On en tire

$$M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}}.$$

D'autre part, il y a une infinité de valeurs de r pour lesquelles

$$\frac{\log\log M(r)}{\log r} > \rho - \varepsilon$$

et, par suite, pour ces valeurs,

$$M(r) > e^{r^{\rho-\varepsilon}}.$$

En définitive, pour une fonction entière d'ordre ρ, la croissance du

---

[1] Nous rappellerons ici la définition de la *plus grande limite* d'une fonction $u(r)$ pour r infini, dont on se servira dans la suite. Soit E l'ensemble des points d'un axe représentant les valeurs limites d'une fonction de variable réelle $u(r)$ pour toutes les suites de nombres r augmentant indéfiniment. Cet ensemble est fermé, c'est-à-dire contient tous ses points d'accumulation. Il se peut, que le point $+\infty$ appartienne à E. Si ce point n'appartient pas à E, l'abscisse du point de E' qui a la plus grande abscisse, point qui existe puisque l'ensemble E est fermé, s'appelle la *plus grande limite* de u et on la désigne par $\overline{\lim_{r=\infty}} u$. Si le point $+\infty$ appartient à E, on dit que la plus grande limite est $+\infty$ et l'on écrit

$$\overline{\lim_{r=\infty}} u = +\infty.$$

La *plus petite limite* se définit de la même manière : c'est le point de E qui a la plus petite abscisse.

module est limitée par les inégalités

$$e^{r^{\rho-\varepsilon}} <' \mathrm{M}(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

pour r suffisamment grand. Nous conviendrons que la notation $\mathrm{A}(r) <' \mathrm{B}(r)$ signifie que l'inégalité $\mathrm{A}(r) < \mathrm{B}(r)$ n'a lieu d'une manière certaine que pour une infinité de valeurs de r croissant indéfiniment.

Ces inégalités n'indiquent rien sur la plus grande limite pour r infini, du quotient

$$\frac{\log \mathrm{M}(r)}{r^\rho}.$$

La considération de cette limite permet de compléter la classification en ordres, en introduisant pour chaque ordre, des *types* de fonctions, d'après M. Pringsheim :

1° Si

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log \mathrm{M}(r)}{r^\rho} = \infty,$$

$f(z)$ appartient au *type maximum* de l'ordre ρ;

2° Si

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log \mathrm{M}(r)}{r^\rho} = \mathrm{A} \neq 0,$$

$f(z)$ appartient au *type moyen* de l'ordre ρ;

3° Enfin, si

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log \mathrm{M}(r)}{r^\rho} = 0,$$

$f(z)$ appartient au *type minimum* de l'ordre ρ.

M. Valiron a poussé plus loin la classification, en subdivisant les fonctions du type minimum en deux classes, suivant que l'intégrale

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\log \mathrm{M}(r)}{r^{\rho+1}} dr$$

est convergente ou divergente. Remarquons d'abord que cette intégrale n'a un sens que si la fonction est du type minimum. En effet, lorsque l'intégrale a un sens, le nombre $\int_{r}^{\infty} \frac{\log \mathrm{M}(r)}{r^{\rho+1}} dr$ tend vers

zéro quand r tend vers l'infini. Or

$$\int_{r}^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{\rho+1}} dr \geqq \log M(r) \int_{r}^{\infty} \frac{dr}{r^{\rho+1}} = \frac{\log M(r)}{\rho r^{\rho}}.$$

Par conséquent, pour que l'intégrale ait un sens, il faut que $\frac{\log M(r)}{r^{\rho}}$ tende vers zéro, comme le premier membre, quand r augmente indéfiniment; $f(z)$ est bien du type minimum.

Ceci établi, la fonction $f(z)$, du type minimum, appartient à la *classe de convergence* si

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{\rho+1}} dr$$

est convergente; $f(z)$, du type minimum, appartient à la *classe de divergence* si l'intégrale précédente est divergente.

14. Classification des fonctions entières au moyen de $T(r)$. — On obtient exactement la même classification des fonctions entières qu'au numéro précédent si l'on emploie la fonction caractéristique $T(r)$ à la place de $\log M(r)$.

En effet, on peut démontrer facilement que les limites qui donnent l'ordre, le type et la classe sont les mêmes si l'on emploie $\log M(r)$ ou $T(r)$. Nous avons établi (n° 11) les inégalités

$$T(r) \leqq \log M(r) \leqq 3\, T(2r).$$

On en déduit

$$\frac{\log T(r)}{\log r} \leqq \frac{\log \log M(r)}{\log r} \leqq \frac{\log 3\, T(2r)}{\log r} = \frac{\log T(2r)}{\log 2r} \frac{\log 2r}{\log r} + \frac{\log 3}{\log r}.$$

Dans le dernier membre, le terme $\frac{\log 3}{\log r}$ tend vers zéro quand r tend vers l'infini. D'autre part $\frac{\log 2r}{\log r}$ tend vers 1. Ceci entraîne que les expressions

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log T(r)}{\log r} \quad \text{et} \quad \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log \log M(r)}{\log r}$$

sont égales entre elles, infinies ou finies. Donc, on trouve le *même ordre* pour une fonction entière, que l'on parte de $T(r)$ ou de $\log M(r)$.

Supposons l'ordre fini. Les inégalités du début donnent aussi

$$\frac{T(r)}{r^{\rho}} \leqq \frac{\log M(r)}{r^{\rho}} \leqq 3 \frac{T(2r)}{(2r)^{\rho}} 2^{\rho}.$$

Les inégalités précédentes montrent que

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{T(r)}{r^\rho} \quad \text{et} \quad \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r)}{r^\rho}$$

sont, en même temps, infinies, finies et différentes de zéro, ou nulles. Donc, la considération de $T(r)$ conduit aux mêmes types de l'ordre ρ que celle de $\log M(r)$.

Enfin, on a de la même manière

$$\frac{T(r)}{r^{\rho+1}} \leq \frac{\log M(r)}{r^{\rho+1}} \leq 3.2^{\rho+1} \frac{T(2r)}{(2r)^{\rho+1}}$$

et, par suite,

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{T(r)}{r^{\rho+1}} dr \quad \text{et} \quad \int_{r_0}^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{\rho+1}} dr$$

sont convergentes ou divergentes en même temps, ce qui montre que les classes sont les mêmes, que l'on parte de $T(r)$ ou de $\log M(r)$.

Donc, pour l'étude de la croissance des *fonctions entières* et pour leur classification, il revient au même d'utiliser la fonction $T(r)$ ou la fonction $\log M(r)$. Mais, si nous passons à l'étude des *fonctions méromorphes*, la fonction $\log M(r)$ n'est plus une fonction croissante, car $M(r)$ est infini pour les circonférences passant par les pôles. C'est la fonction $T(r)$ qui va conserver les propriétés de la fonction $\log M(r)$ et qui permettra de faire une classification des fonctions méromorphes en tous points semblable à celle des fonctions entières.

15. **Classification des fonctions méromorphes.** — Soit $f(z)$ une fonction méromorphe. On considère l'expression

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log T(r)}{\log r}.$$

Si elle est infinie, $f(z)$ est une fonction d'*ordre infini*.

Si cette limite est finie et égale à ρ, la fonction $f(z)$ est d'*ordre* ρ.

Pour les fonctions de l'ordre ρ, on considère :

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{T(r)}{r^\rho}.$$

Si cette plus grande limite est infinie, $f(z)$ appartient au *type maximum* de l'ordre ρ.

Si la limite est finie et différente de zéro, $f(z)$ appartient au *type moyen* de l'ordre ρ.

Enfin, si cette plus grande limite est zéro, $f(z)$ appartient au *type minimum* de l'ordre ρ.

Les fonctions méromorphes du type minimum se subdivisent en deux classes, suivant que l'intégrale

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{T(r)}{r^{\rho+1}}\, dr$$

est convergente ou divergente. Dans le premier cas, $f(z)$ est de la *classe de convergence*; dans le second, $f(z)$ appartient à la *classe de divergence*.

On verrait comme au paragraphe 13, que l'intégrale précédente ne peut avoir un sens que si la fonction $f(z)$ est du type minimum.

16. Quelques propriétés des fonctions de la classe de convergence :

Théorème. — *Si l'intégrale*

$$I = \int_{r_0}^{\infty} \frac{T(r)}{r^{\rho+1}}\, dr$$

est convergente, il en est de même des intégrales

$$J = \int_{r_0}^{\infty} \frac{N(r)}{r^{\rho+1}}\, dr, \qquad K = \int_{r_0}^{\infty} \frac{n(r)}{r^{\rho+1}}\, dr,$$

où $n(r)$ désigne le nombre des pôles de $f(z)$ dont le module est inférieur à r, *ainsi que de la série*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^{\rho}},$$

où r_n représente le module du $n^{\text{ième}}$ pôle de $f(z)$, ceux-ci étant rangés par ordre de modules non décroissants.

Remarquons que, au lieu de considérer les pôles de $f(z)$, on peut aussi bien considérer les zéros de $f(z) - a$, où a est une constante quelconque, en vertu du théorème fondamental de M. Nevanlinna.

On a

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f).$$

où $m(r, f)$ et $N(r, f)$ sont toujours positives, et il est évident que la convergence de I entraîne la convergence de J.

Mais, les intégrales J et K sont convergentes ou divergentes en même temps. En effet, pour toute valeur de r, différente des r_n, on a

$$N(r) = n(r)\log r - \sum_{i=1}^{n(r)} \log r_j,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{d\,N(r)}{dr} = \frac{n(r)}{r}.$$

D'autre part, on a, en intégrant par parties,

$$\int_{r_0}^{r} \frac{N(r)}{r^{\rho+1}}\,dr = \frac{1}{\rho}\,\frac{N(r_0)}{r_0^{\rho}} - \frac{1}{\rho}\,\frac{N(r)}{r^{\rho}} + \frac{1}{\rho}\int_{r_0}^{r} \frac{d\,N(r)}{dr}\,\frac{dr}{r^{\rho}},$$

ou

$$\int_{r_0}^{r} \frac{N(r)}{r^{\rho+1}}\,dr = \frac{1}{\rho}\,\frac{N(r_0)}{r_0^{\rho}} - \frac{1}{\rho}\,\frac{N(r)}{r^{\rho}} + \frac{1}{\rho}\int_{r_0}^{r} \frac{n(r)}{r^{\rho+1}}\,dr.$$

Le rapport $\frac{N(r)}{r^{\rho}}$ tend vers zéro quand r croît indéfiniment, comme $\frac{T(r)}{r^{\rho}}$, d'après la définition même du type minimum. Or, si J converge, on doit avoir

$$\int_{r'}^{r''} \frac{N(r)}{r^{\rho+1}}\,dr < \varepsilon$$

pour r' et r'' *quelconques, supérieurs à un nombre convenablement choisi* R. Il s'ensuit, d'après l'égalité précédente, que

$$\int_{r'}^{r''} \frac{n(r)}{r^{\rho+1}}\,dr$$

tend vers zéro dans les mêmes conditions, ce qui entraîne la convergence de K. Donc, la convergence de l'intégrale J entraîne celle de l'intégrale K. Inversement, on peut écrire l'inégalité précédente sous la forme

$$\int_{r_0}^{r} \frac{N(r)}{r^{\rho+1}}\,dr < \frac{1}{\rho}\,\frac{N(r_0)}{r_0^{\rho}} + \frac{1}{\rho}\int_{r_0}^{r} \frac{n(r)}{r^{\rho+1}}\,dr.$$

Cette inégalité montre que si l'intégrale K est convergente, il en est de même de l'intégrale J.

Passons maintenant à l'étude de la série S. Si l'intégrale I est convergente, nous venons de voir qu'il en est de même des intégrales J et K. Mais la convergence de l'intégrale K entraîne évidemment la convergence de la série

$$\sum \int_{r_n}^{r_{n+1}} \frac{n(r)}{r^{\rho+1}} dr.$$

Or, on a

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{n(r)}{r^{\rho+1}} dr = -\frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{r_2^\rho} - \frac{1}{r_1^\rho}\right],$$

car $n(r) = 1$ pour $r_1 < r \leqq r_2$ par définition. Ensuite,

$$\int_{r_2}^{r_3} \frac{n(r)}{r^{\rho+1}} dr = -\frac{2}{\rho}\left[\frac{1}{r_3^\rho} - \frac{1}{r_2^\rho}\right],$$

car $n(r) = 2$ pour $r_2 < r \leqq r_3$. De la même manière,

$$\int_{r_3}^{r_4} \frac{n(r)}{r^{\rho+1}} dr = -\frac{3}{\rho}\left[\frac{1}{r_4^\rho} - \frac{1}{r_3^\rho}\right],$$

. . . . ,

$$\int_{r_{n-1}}^{r_n} \frac{n(r)}{r^{\rho+1}} dr = -\frac{n-1}{\rho}\left[\frac{1}{r_n^\rho} - \frac{1}{r_{n-1}^\rho}\right].$$

En additionnant ces égalités, on trouve

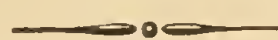
$$\rho\int_{r_1}^{r_n} \frac{n(r)}{r^{\rho+1}} dr = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j^\rho} - \frac{n(r_n)}{r_n^\rho}.$$

Supposons que l'intégrale K soit convergente : $\frac{n(r_n)}{r_n^\rho}$ tend vers zéro quand r augmente indéfiniment. L'égalité précédente montre que S est alors convergente. Donc, si l'intégrale K est convergente, la série S est aussi convergente.

Inversement, on peut écrire

$$\rho\int_{r_1}^{r_n} \frac{n(r)}{r^{\rho+1}} dr < \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j^\rho}.$$

Donc, si la série S est convergente, l'intégrale K, et par suite J, le sont aussi.



CHAPITRE III.

FORME DES FONCTIONS MÉROMORPHES D'ORDRE FINI.

17. **Préliminaires.** — Si l'on connaît les zéros d'une fonction entière, on peut l'écrire sous une forme due à Weierstrass où ces zéros sont mis en évidence. C'est la décomposition en facteurs primaires.

On peut donner une décomposition analogue pour les fonctions méromorphes, mettant en évidence les zéros et les pôles de la fonction.

Nous nous bornerons aux fonctions méromorphes d'ordre fini ρ. Soit donc :

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log T(r)}{\log r} = \rho,$$

d'où l'on déduit, pour r assez grand,

$$T(r) < r^{\rho+\varepsilon}.$$

Désignons par $p+1$ le premier entier supérieur à ρ. Alors

$$\lim_{r=\infty} \frac{T(r)}{r^{p+1}} = 0.$$

Il existe donc un entier p, tel que le rapport $\frac{T(r)}{r^{p+1}}$ tende vers zéro quand r augmente indéfiniment.

Reprenons la formule du paragraphe 4 :

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\zeta)| \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\, d\theta$$
$$-\sum_i \log \frac{\overline{a_i}\, z - r^2}{r(z-a_i)} + \sum_j \log \frac{\overline{b_j}\, z - r^2}{r(z-b_j)} + i\mathrm{C}.$$

En dérivant par rapport à z, on obtient

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\zeta)| \frac{2\zeta}{(\zeta - z)^2}\, d\theta$$
$$-\sum_i \frac{\overline{a_i}}{\overline{a_i}\, z - r^2} + \sum_j \frac{\overline{b_j}}{\overline{b_j}\, z - r^2} + \sum_i \frac{1}{z - a_i} - \sum_j \frac{1}{z - b_j},$$

et, après p dérivations successives,

$$(10)\quad \frac{d^{p+1}\log f(z)}{dz^{p+1}} = \frac{(p+1)!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\zeta)| \frac{2\zeta}{(\zeta - z)^{p+2}}\, d\theta$$
$$-(-1)^p p!\left[\sum_i \left(\frac{\overline{a_i}}{\overline{a_i}\, z - r^2}\right)^{p+1} - \sum \left(\frac{\overline{b_j}}{\overline{b_j}\, z - r^2}\right)^{p+1}\right]$$
$$+(-1)^p p!\left[\sum_i \frac{1}{(z - a_i)^{p+1}} \quad - \sum \frac{1}{(z - b_j)^{p+1}}\right].$$

Pour simplifier l'écriture, posons

$$\mathrm{A} = \frac{(p+1)!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\zeta)| \frac{2\zeta}{(\zeta - z)^{p+2}}\, d\theta,$$
$$\mathrm{B} = (-1)^p p!\left[\sum_i \left(\frac{\overline{a_i}}{\overline{a_i}\, z - r^2}\right)^{p+1} - \sum_j \left(\frac{\overline{b_j}}{\overline{b_j}\, z - r^2}\right)^{p+1}\right].$$

Cherchons la limite du second membre de la formule (10) quand r tend vers l'infini. D'une manière plus précise, supposons que $|z|$ soit inférieur à un nombre fixe r', d'ailleurs arbitraire; et soit $|\zeta| = r > r'$. Nous ferons croître r indéfiniment.

On a

$$|\mathrm{A}| = \left|\frac{(p+1)!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(r\, e^{i\theta})| \frac{2\zeta}{(\zeta - z)^{p+2}}\, d\theta\right|$$
$$\leqq \frac{(p+1)!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big|\log|f(\zeta)|\big| \frac{2r}{(r - r')^{p+2}}\, d\theta.$$

Or,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big|\log|f(\zeta)|\big|\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(\zeta)|\, d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(\zeta)}\right| d\theta = m(r, f) + m\left(r, \frac{1}{f}\right).$$

Donc,

$$|\mathrm{A}| \leqq \frac{2(p+1)!\, r}{(r-r')^{p+2}}\left[m(r, f)+m\left(r, \frac{1}{f}\right)\right].$$

Comme

$$m(r, f)<\mathrm{T}(r), \qquad m\left(r, \frac{1}{f}\right)<\mathrm{T}(r)+b(r),$$

on a finalement,

$$|\mathrm{A}| \geqq \frac{2(p+1)!\, r^{p+2}}{(r-r')^{p+2}} \, \frac{2\,\mathrm{T}(r)+b(r)}{r^{p+1}}.$$

Le second membre de cette inégalité est un produit de deux facteurs. La limite du premier facteur, $\frac{2(p+1)!\, r^{p+2}}{(r-r')^{p+2}}$, quand r tend vers l'infini, est $2(p+1)$! Quand au second facteur, $\frac{2\,\mathrm{T}(r)+b(r)}{r^{p+1}}$, il tend vers zéro. En effet, nous avons supposé plus haut que $\frac{\mathrm{T}(r)}{r^{p+1}}$ tend vers zéro quand r augmente indéfiniment; $b(r)$ étant une fonction bornée, $\frac{b(r)}{r^{p+1}}$ tend également vers zéro. Par conséquent, A *tend vers zéro uniformément quand r augmente indéfiniment.*

Passons maintenant au terme B. On a

$$\left|\frac{\bar{a}}{\bar{a}\, z-r^2}\right|=\frac{1}{\left|z-\frac{r^2}{\bar{a}}\right|},$$

a est à l'intérieur du cercle de rayon r, donc $\frac{r^2}{\bar{a}}$ est à l'extérieur de ce cercle; z est dans le cercle de rayon r'. Donc,

$$\left|z-\frac{r^2}{\bar{a}}\right| \geqq r-r',$$

et

$$\left|\sum_i\left(\frac{\bar{a}_i}{\bar{a}_i z-r^2}\right)^{p+1}\right| \leqq \frac{n(r, 0)}{(r-r')^{p+1}},$$

où $n(r, 0)$ représente le nombre de zéros de $f(z)$ intérieurs au cercle de rayon r.

De la même manière, on a

$$\left|\sum_j\left(\frac{\bar{b}_j}{\bar{b}_j z-r^2}\right)^{p+1}\right|<\frac{n(r, \infty)}{(r-r')^{p+1}}.$$

Cherchons des limites supérieures pour $n(r, 0)$ et $n(r, \infty)$. On a

$$N(r, 0) = \sum_{i=1}^{n(r)} \log \frac{r}{a_i}$$

Si e est la base des logarithmes népériens, on aura

$$N(er, 0) = \sum_{i=1}^{n(er)} \log \frac{er}{a_i} \geqq \sum_{i=1}^{n(r)} \log \frac{er}{a_i},$$

puisque tous les termes des sommes sont positifs. Or,

$$\sum_{i=1}^{n(r)} \log \frac{er}{a_i} = n(r, 0) + \sum_{i=1}^{n(r)} \log \frac{r}{a_i} = n(r, 0) + N(r, 0).$$

Donc

$$N(er, 0) \geqq n(r, 0) + N(r, 0) \geqq n(r, 0),$$

puisque $N(r, 0)$ est positif ou nul. Par conséquent,

$$n(r, 0) \leqq N(er, 0).$$

De même,

$$n(r, \infty) \leqq N(er, \infty),$$

et, finalement,

$$|B| \leqq p! \frac{1}{(r-r')^{p+1}} [n(r, 0) + n(r, \infty)]$$

$$\leqq p! \frac{r^{p+1}}{(r-r')^{p+1}} \frac{N(er, 0) + N(er, \infty)}{r^{p+1}},$$

et

$$|B| < \frac{p!(er)^{p+1}}{(r-r')^{p+1}} \frac{T(er, 0) + T(er, \infty)}{(er)^{p+1}}.$$

Quand r augmente vers l'infini, le second membre de cette inégalité tend vers zéro. En effet, le premier facteur, $\frac{p!(er)^{p+1}}{(r-r')^{p+1}}$, tend vers $p!e^{p+1}$. Par hypothèse, $\frac{T(er, 0)}{(er)^{p+1}}$ tend vers zéro et $T(er, \infty)$ ne diffère de $T(er, 0)$ que par une constante. Par conséquent, B *tend vers zéro, uniformément, quand r augmente indéfiniment.*

En résumé, la formule (10) devient, quand r augmente indéfiniment,

$$(11) \quad \frac{d^{p+1} \log f(z)}{dz^{p+1}} = \lim_{r=\infty} (-1)^p p! \left[\sum_i \frac{1}{(z-a_i)^{p+1}} - \sum_j \frac{1}{(z-b_j)^{p+1}} \right].$$

Pour avoir la limite, il ne faut pas faire tendre r vers l'infini séparément dans $\sum_i$ et dans $\sum_j$. On considère à la fois tous les zéros et tous les pôles de $f(z)$ intérieurs au cercle de rayon r, on forme la différence $\sum_i \frac{1}{(z-a_i)^{p+1}} - \sum_j \frac{1}{(z-b_j)^{p+1}}$, et l'on fait ensuite tendre r vers l'infini.

18. Forme canonique d'une fonction méromorphe d'ordre fini. — L'égalité (11) permet de donner aux fonctions méromorphes une forme analogue à la décomposition en facteurs primaires des fonctions entières. Le second membre de (11) est uniformément convergent; donc on peut intégrer terme à terme. Or, si l'on intègre entre 0 et z le terme $(-1)^p p! \frac{1}{(z-a)^{p+1}}$, on obtient, après une intégration,

$$(-1)^{p-1}(p-1)!\frac{1}{(z-a)^p} + \frac{(p-1)!}{a^p},$$

et, après p intégrations successives entre les mêmes limites 0 et z,

$$\frac{1}{z-a} + \frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} + \ldots + \frac{z^{p-1}}{a^p},$$

et, enfin, après une $(p+1)^{\text{ième}}$ intégration entre 0 et z,

$$\log\left(\frac{z-a}{-a}\right) + \frac{z}{a} + \frac{z^2}{2a^2} + \ldots + \frac{z^p}{pa^p}.$$

Alors, en intégrant $p+1$ fois la formule (11) entre les limites 0 et z, on obtient

$$\log f(z) = \lim_{r=\infty} \Bigg[\sum_i \left[\log\left(1-\frac{z}{a_i}\right) + \frac{z}{a_i} + \frac{z^2}{2a_i^2} + \ldots + \frac{z^p}{pa_i^p}\right]$$
$$- \sum_j \left[\log\left(1-\frac{z}{b_j}\right) + \frac{z}{b_j} + \frac{z^2}{2b_j^2} + \ldots + \frac{z^p}{pb_j^p}\right]\Bigg] + \mathrm{P}(z),$$

où $\mathrm{P}(z)$ est un polynome arbitraire de degré p, résultant des $p+1$ intégrations successives. La somme $\sum_i$ est étendue à tous les zéros de $f(z)$ pour lesquels $|a_i| < r$ et la somme $\sum$ à tous les pôles

tels que $|b_j| < r$. On fait tendre r vers l'infini après avoir effectué la différence $\sum\limits_i - \sum\limits_j$.

En passant des logarithmes aux nombres, on obtient la formule fondamentale

$$(12)\qquad f(z) = e^{P(z)} \lim_{r=\infty} \prod \left\{ \frac{\left(1 - \frac{z}{a_i}\right) e^{\frac{z}{a_i} + \ldots + \frac{z^p}{p a_i^p}}}{\left(1 - \frac{z}{b_j}\right) e^{\frac{z}{b_j} + \ldots + \frac{z^p}{p b_j^p}}} \right\}.$$

Dans le second membre, on a la limite d'un quotient : le numérateur est le produit des facteurs primaires

$$\left(1 - \frac{z}{a_i}\right) e^{\frac{z}{a_i} + \ldots + \frac{z^p}{p a_i^p}}$$

correspondant à tous les zéros a_i de $f(z)$ tels que $|a_i| < r$; le dénominateur est le produit des facteurs primaires correspondant à tous les pôles b_j de $f(z)$ tels que $|b_j| < r$; on prend, *ensuite*, la limite de ce quotient. La limite de ce quotient n'est pas nécessairement égale au quotient des deux produits infinis formés avec les facteurs du numérateur et ceux du dénominateur, car ces produits peuvent être divergents.

Nous avons laissé de côté le cas où l'origine est un zéro ou un pôle d'ordre k de $f(z)$. Dans ce cas, on divise ou l'on multiplie $f(z)$ par z^k et l'on retombe sur le cas précédent. De sorte qu'on a, finalement,

$$(13)\qquad f(z) = z^k e^{P(z)} \lim_{r=\infty} \prod \left\{ \frac{\left(1 - \frac{z}{a_i}\right) e^{\frac{z}{a_i} + \ldots + \frac{z^p}{p a_i^p}}}{\left(1 - \frac{z}{b_j}\right) e^{\frac{z}{b_j} + \ldots + \frac{z^p}{p b_j^p}}} \right\};$$

k est positif, négatif ou nul, suivant que l'origine est un zéro, un pôle, ou un point où $f(z)$ a une valeur finie et non nulle.

19. **Cas particuliers.** — La limite du quotient, qui intervient dans les formules (12) et (13), peut être remplacée dans certains cas par le quotient des limites des produits infinis du numérateur et du dénominateur. Il faut et il suffit pour cela que chacun de ces produits

soit convergent. Il en sera ainsi lorsque les séries

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|a_i|^{p+1}}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|b_j|^{p+1}},$$

sont convergentes ([1]).

Par exemple, si $|a_n| = n$, on peut prendre $p = 1$; si $|a_n| = \sqrt{n}$, on prend $p = 2$, et ainsi de suite. A mesure qu'il y a plus de zéros de $f(z)$ dans le cercle de rayon r, il faut prendre p plus grand et les fonctions sont de plus en plus compliquées. Même remarque pour les b_j.

Supposons donc que les séries $\sum \frac{1}{|a_i|^{p+1}}$ et $\sum \frac{1}{|b_j|^{p+1}}$ soient convergentes. Dans ce cas, la formule (13) conduit à une représentation particulière des fonctions méromorphes :

$$(14) \qquad f(z) = z^k e^{P(z)} \frac{\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_i}\right) e^{\frac{z}{a_i} + \ldots + \frac{z^p}{p a_i^p}}}{\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{b_j}\right) e^{\frac{z}{b_j} + \ldots + \frac{z^p}{p b_j^p}}}.$$

Montrons que : *La formule* (14) *est applicable à toute fonction* $f(z)$ *qui est du type minimum de l'ordre* $p+1$ *et de la classe de convergence*, c'est-à-dire telle que l'intégrale $\int_{r_0}^{\infty} \frac{T(r)\,dr}{r^{p+2}}$ soit convergente.

En effet, nous avons démontré au paragraphe 16 que la convergence de l'intégrale

$$I = \int_{r_0}^{\infty} \frac{T(r)}{r^{p+2}}\, dr$$

entraîne la convergence de la série

$$S = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|b_j|^{p+1}}$$

([1]) *Voir*, par exemple, Ed. Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, t. II, 4e éd., p. 150.

et, par conséquent, de la série

$$\sum_1^\infty \frac{1}{|a_i|^{p+1}},$$

puisque $T(r, \infty)$ et $T(r, 0)$ ne diffèrent que par une constante.

Donc, dans ce cas, les produits infinis

$$\prod_{i=1}^\infty \left(1 - \frac{z}{a_i}\right) e^{\frac{z}{a_i} + \ldots + \frac{z^p}{p a_i^p}},$$

$$\prod_{j=1}^\infty \left(1 - \frac{z}{b_j}\right) e^{\frac{z}{b_j} + \ldots + \frac{z^p}{p b_j^p}}$$

sont séparément convergents et l'on peut appliquer la formule (14).

20. **Genre des fonctions méromorphes.** — On sait que si une fonction entière peut être décomposée en facteurs primaires sous la forme

$$z^k e^{P(z)} \prod \left(1 - \frac{z}{a}\right) e^{\frac{z}{a} + \ldots + \frac{z^p}{p a^p}},$$

$P(z)$ désignant un polynome de degré inférieur ou égal à p, on dit qu'elle est de genre p. Dans ce cas, si l'on désigne par $M(r)$ le maximum du module de la fonction dans le cercle de rayon r, l'expression

$$\frac{\log M(r)}{r^{p+1}}$$

tend vers zéro quand r tend vers l'infini [1].

Comme nous l'avons déjà remarqué, la fonction caractéristique $T(r)$ joue, pour les fonctions méromorphes, un rôle analogue à celui de $\log M(r)$ pour les fonctions entières.

Nous avons vu, au début du paragraphe 17, que pour les fonctions méromorphes d'ordre fini ρ, on peut toujours trouver un entier p tel que

$$\frac{T(r)}{r^{p+1}}$$

tende vers zéro quand r augmente indéfiniment.

[1] *Voir*, par exemple, E. Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, Chap. III.

Il s'ensuit que l'on peut toujours déterminer un entier s tel que

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{T(r)}{r^{s+2}}\, dr$$

soit convergente. En effet, dans tous les cas, on peut prendre $s = p + 1$, car

$$\frac{T(r)}{r^{s+2}} = \frac{T(r)}{r^{p+1}} \cdot \frac{1}{r^2} < \frac{1}{r^2}$$

pour r assez grand.

En vertu des résultats du paragraphe 19, on peut donc toujours mettre une fonction méromorphe d'ordre fini sous la forme de quotient de deux fonctions entières :

$$f(z) = z^k e^{P(z)} \frac{\prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_i}\right) e^{\frac{z}{a_i} + \ldots + \frac{z^s}{s a_i^s}}}{\prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{b_j}\right) e^{\frac{z}{b_j} + \ldots + \frac{z^s}{s b_j^s}}}.$$

Cette représentation est générale. Mais il peut exister un entier $p' < s$ tel que la série $\sum \frac{1}{|a_i|^{p'+1}}$ soit convergente. De même, il peut exister un entier $p'' < s$ tel que la série $\sum \frac{1}{|b_j|^{p''+1}}$ soit convergente. Il est évident que l'on peut alors remplacer le numérateur et le dénominateur par des produits infinis de genres p' et p'' respectivement, en modifiant le polynome $P(z)$. Enfin, le polynome $P(z)$ peut, lui aussi, être de degré p''' inférieur à p. $f(z)$ prend alors la forme

$$f(z) = z^k e^{P(z)} \frac{\prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_i}\right) e^{\frac{z}{a_i} + \ldots + \frac{z^{p'}}{p' a_i^{p'}}}}{\prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{b_j}\right) e^{\frac{z}{b_j} + \ldots + \frac{z^{p''}}{p'' b_j^{p''}}}} = z^k e^{P(z)} \frac{\Pi_1}{\Pi_2}.$$

Le plus grand des entiers p', p'', p''' s'appelle le genre de la fonction méromorphe.

21. Relations entre l'ordre et le genre d'une fonction méromorphe. — Soit une fonction méromorphe $f(z)$, d'ordre ρ et de genre p.

Nous allons démontrer les inégalités

$$(15) \qquad \rho - 1 \leqq p \leqq \rho.$$

En effet, d'après la définition de l'ordre, on a, quel que soit ε positif,

$$\lim_{r=\infty} \frac{T(r)}{r^{\rho+\varepsilon}} = 0.$$

Si $q+1$ est le premier entier supérieur à ρ, il s'ensuit que l'intégrale

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{T(r)}{r^{q+2}} dr$$

est convergente car, si 2ε désigne la différence $q+1-\rho$, le produit $r^{1+\varepsilon} \frac{T(r)}{r^{q+2}}$ tend vers zéro pour r infini, et par suite que les séries

$$\sum \frac{1}{|a_i|^{q+1}}, \quad \sum \frac{1}{|b_j|^{q+1}}$$

sont convergentes. Par conséquent, les produits infinis du numérateur et du dénominateur de $f(z)$ sont de genre q au plus. Mais on peut écrire

$$e^{P(z)} = f(z) z^{-k} \frac{\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{b_j}\right) e^{\frac{z}{b_j} + \ldots + \frac{z^q}{q b_j^q}}}{\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_i}\right) e^{\frac{z}{a_i} + \ldots + \frac{z^q}{q a_i^q}}} = f(z) z^{-k} \frac{\Pi_2}{\Pi_1},$$

et, en tenant compte de la quatrième propriété du paragraphe 16,

$$\frac{T(e^{P(z)})}{r^{q+1}} \leqq \frac{T[f(z)]}{r^{q+1}} + \frac{T(z^{-k})}{r^{q+1}} + \frac{T(\Pi_2)}{r^{q+1}} + \frac{T\left(\frac{1}{\Pi_1}\right)}{r^{q+1}}.$$

Faisons tendre r vers l'infini. Le premier terme du second membre de cette inégalité tend vers zéro (§ 17), car $q+1$ est supérieur à l'ordre ρ de $f(z)$. Le second terme tend évidemment vers zéro, car $T(z^{-k})$ est comparable à $\log r$. Enfin, le troisième et le quatrième terme du second membre tendent aussi vers zéro, car les produits canoniques qui y figurent sont de genre q. Or, on a vu, au paragraphe 14, que les croissances $T(r)$ et $\log M(r)$ sont comparables, et l'on a rappelé au début du paragraphe 20 que, pour un pro-

duit de facteurs primaires de genre q, le rapport $\frac{\log M(r)}{r^{q+1}}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

Il en est donc de même de $\frac{T(\Pi_2)}{r^{q+1}}$ et de $\frac{T(\Pi_1)}{r^{q+1}}$; mais $T(\Pi_1)$ et $T\left(\frac{1}{\Pi_1}\right)$ ne diffèrent que par une constante. Par conséquent,

$$\lim_{r=\infty} \frac{T(e^{P(z)})}{r^{q+1}} = 0.$$

Ceci montre que le degré p''' de $P(z)$ est au plus égal à q, car $T(e^{P(z)})$ est comparable à $r^{p'''}$ quand r tend vers l'infini.

Donc, le genre p de $f(z)$ est au plus égal à q et, comme $q+1$ est le plus petit entier supérieur à ρ, on a bien

$$p \leqq \rho.$$

La seconde inégalité de l'énoncé est démontrée.

Pour démontrer la première, nous allons établir que si p est le genre, l'ordre ρ ne dépasse pas $p+1$.

En effet, $f(z)$ est représentée dans ce cas par la formule (14) où $P(z)$ est un polynome de degré p au plus. On en déduit, en tenant compte, comme plus haut, de la quatrième propriété du paragraphe **16**, et en désignant par Π_1 et Π_2 les produits canoniques du numérateur et du dénominateur,

$$\frac{T[f(z)]}{r^{p+1}} \leqq \frac{T(z^k)}{r^{p+1}} + \frac{T(e^{P(z)})}{r^{p+1}} + \frac{T(\Pi_1)}{r^{p+1}} + \frac{T\left(\frac{1}{\Pi_2}\right)}{r^{p+1}}.$$

Faisons augmenter r indéfiniment. Comme précédemment, le premier et le second terme du second membre tendent vers zéro. De même, $\frac{T(\Pi_1)}{r^{p+1}}$ et $\frac{T\left(\frac{1}{\Pi_2}\right)}{r^{p+1}}$ tendent vers zéro, car les produits sont de genre p. Il s'ensuit que le second membre de l'inégalité précédente tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$. Donc

$$\lim_{r=\infty} \frac{T(r, f)}{r^{p+1}} = 0,$$

ce qui montre que l'ordre ρ de $f(z)$ est inférieur ou égal à $p+1$. Et, de plus, s'il est égal à $p+1$, la fonction $f(z)$ appartient au type

minimum de cet ordre. Ainsi la première inégalité de l'énoncé est établie.

22. **Détermination du genre des fonctions méromorphes.** — Les inégalités (15) permettent, en général, de trouver le genre d'une fonction méromorphe si l'on connaît $T(r, f)$. Supposons que l'on ait

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log T(r)}{\log r} = \rho,$$

ρ est l'ordre de $f(z)$.

Si ρ n'est pas entier, les inégalités

$$\rho - 1 \leqq p \leqq \rho$$

montrent que *le genre p est nécessairement égal au plus grand entier contenu dans* ρ.

Si ρ est entier, le genre peut être soit ρ, soit $\rho - 1$. Mais si le genre de $f(z)$ est p, on vient de voir que

$$\lim_{r=\infty} \frac{T(r, f)}{r^{\rho+1}} = 0,$$

c'est-à-dire que $f(z)$ appartientau type minimum de l'ordre $p+1$. Par conséquent, si

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{T(r, f)}{r^{\rho}} \neq 0,$$

$f(z)$ ne peut pas être de genre $\rho - 1$. Donc, *si ρ est entier et si $f(z)$ appartient au type maximum ou au type normal de l'ordre ρ, le genre est ρ.*

Il reste à étudier le cas où $f(z)$ appartient au *type minimum* de l'ordre ρ. Deux cas se présentent : $f(z)$ appartient à la classe de convergence ou à la classe de divergence.

1° *$f(z)$ appartient à la classe de convergence du type minimum d'ordre* ρ. L'intégrale

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{T(r)}{r^{\rho+1}} dr$$

est convergente. Alors (§ 16), les séries $\sum_i \frac{1}{|a_i|^\rho}$ et $\sum_j \frac{1}{|b_j|^\rho}$ sont convergentes, et *le genre de $f(z)$ est* $\rho - 1$.

2° *Si $f(z)$ appartient à la classe de divergence*, nous ne pouvons plus conclure sans étudier directement les séries $\sum_i \frac{1}{|a_i|^\rho}$ et $\sum_j \frac{1}{|b_j|^\rho}$. Si ces deux séries convergent, le genre de la fonction est bien $\rho - 1$. Mais il suffit que l'une de ces séries diverge pour que le produit infini correspondant diverge, et le genre de $f(z)$ devient, dans ce cas, égal à ρ.

Ce cas est d'ailleurs exceptionnel. Pour montrer combien rares sont les cas où il y a doute sur le genre de $f(z)$ quand on connaît $T(r)$, il suffit d'indiquer que, de toutes les fonctions déduites de $f(z)$ par une transformation homographique à coefficients constants, une seule au plus peut donner lieu à ce doute.

En résumé : *Soit p, le genre d'une fonction méromorphe $f(z)$ d'ordre fini ρ. Si ρ n'est pas entier, p est égal au plus grand entier contenu dans ρ. Si ρ est entier et si $f(z)$ appartient au type maximum ou au type normal de l'ordre ρ, p est égal à ρ. Si ρ étant entier, $f(z)$ appartient au type minimum de l'ordre ρ et à la classe de convergence, p est égal à $\rho - 1$. Enfin si $f(z)$ appartient à la classe de divergence, il y a doute et l'on doit examiner directement la convergence des séries* $\sum_i \frac{1}{|a_i|^\rho}$ *et* $\sum_j \frac{1}{|b_j|^\rho}$.

23. **Cas des fonctions d'ordre infini.** — On dit aussi que le genre est infini.

On peut encore donner une représentation de la fonction à l'aide de produits de facteurs primaires, s'annulant pour les zéros et pour les pôles. On sait que l'on peut trouver, d'une infinité de façons, deux suites de nombres p_i et q_j tels que les produits infinis

$$\Pi_1 = \prod_i \left(1 - \frac{z}{a_i}\right) e^{\frac{z}{a_i} + \ldots + \frac{z^{p_i}}{p_i a_i^{p_i}}},$$

$$\Pi_2 = \prod_j \left(1 - \frac{z}{b_j}\right) e^{\frac{z}{b_j} + \ldots + \frac{z^{q_j}}{q_j b_j^{q_j}}}$$

soient absolument et uniformément convergents. Par exemple, il suffit de prendre p_i tel que

$$\frac{1}{|a_i|^{p_i+1}} < \alpha_i,$$

α_i étant le terme général d'une série convergente. Si nous considérons alors la fonction

$$f(z)\frac{\Pi_2}{\Pi_1}z^{-k},$$

c'est une fonction méromorphe qui n'a plus ni zéros, ni pôles; elle est donc de la forme $e^{\varphi(z)}$, où φ est une fonction entière de z. On en déduit la représentation suivante d'une fonction méromorphe d'ordre infini : on peut écrire, *d'une infinité de manières*,

$$f(z) = z^k e^{\varphi(z)} \frac{\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_i}\right)e^{\frac{z}{a_i}+\ldots+\frac{z^{p_i}}{p_i a_i^{p_i}}}}{\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{b_j}\right)e^{\frac{z}{b_j}+\ldots+\frac{z^{q_j}}{q_j b_j^{q_j}}}}.$$

24. **Problèmes d'unicité.** — Nous venons de voir comment peut s'exprimer une fonction méromorphe dont on connaît tous les zéros et tous les pôles. Plaçons-nous dans le cas où l'on se donne, pour plus de deux valeurs, la distribution des points en lesquels une fonction prend chacune de ces valeurs. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe. Désignons par $E(a)$ l'ensemble des points où $f(z)$ prend la valeur a, chaque point de $E(a)$ étant compté un nombre de fois égal à l'ordre de multiplicité de la racine correspondante de l'équation

$$f(z) = a.$$

En particulier, $E(\infty)$ représente l'ensemble des pôles de $f(z)$. L'étude précédente montre qu'une fonction méromorphe n'est pas déterminée quand on connaît les ensembles $E(0)$ et $E(\infty)$, car il subsiste un facteur exponentiel arbitraire.

On est ainsi conduit à étudier des problèmes d'unicité, comme l'ont fait MM. G. Pólya, R. Nevanlinna et H. Cartan (¹).

Nous démontrerons le théorème suivant :

(¹) G. Pólya, *Bestimmung einer ganzen Funktion endlichen Geschlechts durch viererlei Stellen* (*Mathematisk Tidskrift*, 1921). — R. Nevanlinna, *Einige Eindeutigkeitssätze in der Theorie der meromorphen Funktionen* (*Acta mathematica*, t. 48, 1926); *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de Paris*, t. 186, p. 289, 1928). — H. Cartan, *Sur quelques théorèmes de M. R. Nevanlinna*, (*Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de Paris*, t, 185, p. 1253, 1927).

Il existe au plus deux fonctions distinctes $f(z)$ et $g(z)$, méromorphes dans tout le plan, pour lesquelles les ensembles $E(a)$, $E(b)$, $E(c)$ *sont donnés.*

On peut, évidemment, effectuer une transformation homographique convenable afin que a, b, c deviennent 0, 1, ∞. La démonstration repose sur un théorème de M. Borel [1], qui généralise le théorème de M. Picard :

Si l'on a une identité de la forme

$$f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_p(z)=0$$

entre des fonctions entières sans zéros, ou bien leurs rapports mutuels sont des constantes, ou bien ces fonctions se partagent en plusieurs groupes, la somme des fonctions de chaque groupe étant identiquement nulle.

Nous allons démontrer l'impossibilité de l'existence de trois fonctions méromorphes distinctes f, g, h, ayant les mêmes zéros, les mêmes pôles et les mêmes points-unités, c'est-à-dire prenant la valeur *un* aux mêmes points. En effet, si ces fonctions existent, les rapports

$$\frac{f(z)}{g(z)}=X_1, \qquad \frac{f-1}{g-1}=X_2, \qquad \frac{f}{h}=X_3, \qquad \frac{f-1}{h-1}=X_4,$$

sont des fonctions méromorphes sans zéros ni pôles. En éliminant f, g, h, entre ces quatre équations, on obtient l'identité

$$X_1X_2X_3-X_1X_2X_4+X_2X_3X_4-X_1X_3X_4+X_1X_4-X_2X_3=0.$$

Si l'on pose

$$f_1=X_1X_2X_3, \qquad f_2=-X_1X_2X_4, \qquad f_3=X_2X_3X_4,$$
$$f_4=-X_1X_3X_4, \qquad f_5=X_1X_4, \qquad f_6=-X_2X_3,$$

les f_i sont des fonctions entières sans zéros satisfaisant à l'identité

$$f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6=0.$$

---

[1] *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica*, t. 20, p. 357-396, 1897).

Le théorème de M. Borel exige alors que l'on se trouve dans l'un des cas suivants :

1° Les rapports mutuels de ces six fonctions sont constants;

2° Une fonction est constante, les rapports mutuels des cinq fonctions restantes étant constants;

3° Les fonctions se séparent en deux groupes : un de deux fonctions et un autre de quatre, les rapports mutuels des fonctions d'un même groupe étant constants;

4° Les fonctions se séparent en deux groupes de trois fonctions jouissant des propriétés précédentes;

5° Les fonctions se séparent en trois groupes de deux fonctions dont le rapport est constant.

Dans le premier cas,

$$\frac{f_1}{f_6} = -X_1, \qquad \frac{f_2}{f_5} = -X_2, \qquad \frac{f_6}{X_2} = -X_3, \qquad \frac{f_5}{X_1} = X_4$$

sont des constantes. Il s'ensuit que f, g, h sont des constantes, ce qui est absurde.

L'analyse des quatre autres cas conduit à une des conclusions suivantes : ou bien les trois fonctions sont constantes, ou bien deux d'entre elles sont égales, ou bien elles sont égales entre elles toutes les trois, ce qui démontre le théorème. Nous n'entrons pas dans les détails de l'analyse qui est facile.

En général, la connaissance de $E(a)$, $E(b)$ et $E(c)$ détermine une seule fonction $f(z)$. Le cas où il y a deux fonctions méromorphes $f(z)$ et $g(z)$ comme solutions est exceptionnel. On a donné la forme de $f(z)$ et de $g(z)$ pour que cela ait lieu. Cette forme est la suivante :

$$f(z) = \frac{c(a-b)\,e^{\varphi(z)} + a(b-c)\,e^{\psi(z)} + b(c-a)\,e^{\theta(z)}}{(a-b)\,e^{\varphi(z)} + (b-c)\,e^{\psi(z)} + (c-a)\,e^{\theta(z)}},$$

$$g(z) = \frac{c(a-b)\,e^{-\varphi(z)} + a(b-c)\,e^{-\psi(z)} + b(c-a)\,e^{-\theta(z)}}{(a-b)\,e^{-\varphi(z)} + (b-c)\,e^{-\psi(z)} + (c-a)\,e^{-\theta(z)}},$$

où $E(a)$, $E(b)$, $E(c)$ sont les ensembles de points en lesquels on a, respectivement,

$$e^{\varphi(z)} = e^{\theta(z)},$$
$$e^{\psi(z)} = e^{\varphi(z)},$$
$$e^{\theta(z)} = e^{\psi(z)}.$$

Il peut arriver que les deux fonctions $f(z)$ et $g(z)$, qui ont en commun les ensembles $E(a)$, $E(b)$, $E(c)$, aient en commun un quatrième ensemble $E(d)$. Cela se présente lorsque deux des valeurs, a et b par exemple, sont lacunaires et que

$$(a, b, c, d) = -1.$$

On a alors

$$(f, g, c, d) = -1.$$

Par exemple, les fonctions

$$f(z) = e^z, \qquad g(z) = e^{-z}$$

ont les mêmes ensembles $E(0)$, $E(\infty)$, $E(1)$ et $E(-1)$.

M. H. Cartan a démontré, d'une manière analogue, le théorème plus général suivant :

Il existe au plus deux fonctions méromorphes prenant, à l'extérieur d'un cercle donné de rayon aussi grand qu'on veut, trois valeurs a, b, c pour les mêmes ensembles $E(a)$, $E(b)$, $E(c)$.

En général, la connaissance de $E(a)$, $E(b)$, $E(c)$ détermine $f(z)$. *Mais, inversement, étant donnés trois ensembles arbitraires, il n'existe pas en général de fonction méromorphe dans tout le plan prenant respectivement les valeurs a, b, c, aux points des ensembles donnés.*

Les ensembles $E(a)$, $E(b)$, $E(c)$ d'une fonction méromorphe dans tout le plan ne peuvent donc pas être pris arbitrairement.

Nous nous bornerons aux énoncés précédents sans en donner les démonstrations.

On peut se poser des problèmes d'unicité différents, en faisant intervenir, par exemple, les ensembles des zéros des dérivées successives de $f(z)$: $E'(0)$, $E''(0)$, etc. Dans cet ordre d'idées, M. Gontcharoff [1] a démontré le théorème suivant :

Considérons quatre ensembles de points et supposons qu'ils

---

[1] W. Gontcharoff, *Sur la détermination des fonctions par les zéros de leurs dérivées* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 185, 1927, p. 1575).

représentent les ensembles des zéros et des pôles d'une fonction $f(z)$ et les ensembles des zéros de la première et de la seconde dérivée. En supposant qu'il existe une fonction méromorphe d'ordre fini $f(z)$ qui satisfasse à ces conditions, la solution générale est $kf(z)$, k étant une constante, sauf quelques cas exceptionnels.

CHAPITRE IV.

NOUVELLES PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION CARACTÉRISTIQUE.

25. **Limitation de la moyenne logarithmique.** — Reprenons la formule (3) :

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\zeta)| \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\theta$$
$$-\sum_i \log \frac{\bar{a}_i z - r^2}{r(z - a_i)} + \sum_j \log \frac{\bar{b}_j z - r^2}{r(z - b_j)} + iC,$$

où

$$\zeta = r e^{i\theta}, \qquad z = \rho e^{i\varphi} \qquad (\rho < r).$$

En dérivant, on obtient

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})| \frac{2\zeta}{(\zeta - z)^2} d\theta$$
$$+\sum_i \frac{r^2 - a_i\bar{a}_i}{(z - a_i)(r^2 - \bar{a}_i z)} - \sum_j \frac{r^2 - b_j \bar{b}_j}{(z - b_j)(r^2 - \bar{b}_j z)}.$$

Mais on a évidemment

$$\left|\frac{2\zeta}{(\zeta - z)^2}\right| \leq \frac{2r}{(r - \rho)^2}.$$

D'autre part,

$$\left|\frac{r^2 - a_i\bar{a}_i}{(z - a_i)(r^2 - \bar{a}_i z)}\right| = \left|\frac{r^2 - \bar{a}_i z}{r(z - a_i)}\right| \times \left|\frac{r(r^2 - a_i\bar{a}_i)}{(r^2 - \bar{a}_i z)^2}\right|$$
$$\leq \left|\frac{r^2 - \bar{a}_i z}{r(z - a_i)}\right| \frac{r}{(r - \rho)^2} < \left|\frac{r^2 - \bar{a}_i z}{r(z - a_i)}\right| \frac{2r}{(r - \rho)^2},$$

car

$$r^2 - a_i\bar{a}_i < r^2 \qquad \text{et} \qquad |r^2 - \bar{a}_i z| > r^2 - |\bar{a}_i|\rho > r^2 - r\rho.$$

On a une inégalité analogue pour les pôles b_j. On peut donc écrire,

en renforçant l'inégalité,

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqq \frac{2r}{(r-\rho)^2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log|f(\zeta)|\right|d\theta + \sum_i\left|\frac{r^2-\overline{a}_i z}{r(z-a_i)}\right| + \sum_j\left|\frac{r^2-\overline{b}_j z}{r(z-b_j)}\right|\right].$$

En tenant compte des propriétés de $\overset{+}{\log}$ établies au paragraphe 6, on en déduit

$$\overset{+}{\log}\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqq \overset{+}{\log}\frac{2r}{(r-\rho)^2} + \overset{+}{\log}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log|f(\zeta)|\right|d\theta\right] + \overset{+}{\log}\left[\sum_i\left|\frac{r^2-\overline{a}_i z}{r(z-a_i)}\right| + \sum_j\left|\frac{r^2-\overline{b}_j z}{r(z-b_j)}\right|\right] + \log 2.$$

Dans le second membre, le troisième $\overset{+}{\log}$ porte sur un nombre de termes $\nu(r)$, égal au nombre des zéros $n\left(r, \frac{1}{f}\right)$ plus le nombre des pôles $n(r, f)$ de la fonction $f(z)$ contenus dans le cercle C_r de rayon r. Dès lors, en appliquant de nouveau les propriétés des $\overset{+}{\log}$, on obtient

$$\overset{+}{\log}\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqq \overset{+}{\log}\frac{2r}{(r-\rho)^2} + \log 2 + \overset{+}{\log}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log|f(\zeta)|\right|d\theta\right] + \overset{+}{\log}\nu(r) + \sum_i\overset{+}{\log}\left|\frac{r^2-\overline{a}_i z}{r(z-a_i)}\right| + \sum_j\overset{+}{\log}\left|\frac{r^2-\overline{b}_j z}{r(z-b_j)}\right|.$$

Cette inégalité est vérifiée quel que soit le point z, à l'intérieur du cercle C_r. Elle est donc vérifiée sur la circonférence C_ρ, de rayon ρ, et, en prenant la valeur moyenne sur cette circonférence,

$$(16)\quad m\left(\rho, \frac{f'}{f}\right) \leqq \overset{+}{\log}\frac{2r}{(r-\rho)^2} + \log 2 + \overset{+}{\log}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log|f(\zeta)|\right|d\theta\right] + \overset{+}{\log}\nu(r) + \sum_i\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}\left|\frac{r^2-\overline{a}_i z}{r(z-a_i)}\right|d\varphi + \sum_j\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}\left|\frac{r^2-\overline{b}_j z}{r(z-b_j)}\right|d\varphi.$$

Cette inégalité donne une limitation de $m\left(\rho, \frac{f'}{f}\right)$ dans tout le cercle C_r. Mais on peut la mettre sous une autre forme à l'aide de la fonction caractéristique $T(r)$. En effet,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log|f(\zeta)|\right|d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}|f(\zeta)|\,d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(\zeta)}\right|d\theta = m(r,f)+m\left(r,\frac{1}{f}\right).$$

Supposons $f(0) = c_0$, où c_0 est une constante finie et différente de zéro. On a par définition :

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f)$$

où

$$N(r,f) = \sum_j \log\frac{r}{|b_j|} \geqq 0.$$

Donc

$$m(r,f) \leqq T(r,f), \qquad m\left(r,\frac{1}{f}\right) \leqq T\left(r,\frac{1}{f}\right).$$

Enfin, la formule (8) du paragraphe 7 donne

$$T(r,f) = T\left(r,\frac{1}{f}\right) + \log|c_0|.$$

Alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log|f(\zeta)|\right|d\theta \leqq 2\,T(r) + \overset{+}{\log}\frac{1}{|c_0|}$$

et

$$(\alpha)\quad \overset{+}{\log}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log|f(\zeta)|\right|d\theta\right] \leqq 2\log 2 + \overset{+}{\log}\,T(r) + \overset{+}{\log}\,\overset{+}{\log}\frac{1}{|c_0|}.$$

Cherchons maintenant une limite supérieure de $\overset{+}{\log}\nu(r)$. Pour cela, considérons un cercle de rayon $r' > r$. Nous déterminerons r' par la suite. On a

$$N(r',f) + N\left(r',\frac{1}{f}\right) = \sum_i \log\frac{r'}{|a_i|} + \sum_j \log\frac{r'}{|b_j|}$$

$$|a_i| < r', \qquad |b_j| < r'.$$

Si l'on envisage seulement les $\nu(r)$ zéros ou pôles de $f(z)$ tels que $|a_i| < r$ et $|b_j| < r$, on a évidemment

$$N(r',f) + N\left(r',\frac{1}{f}\right) \geqq \nu(r)\log\frac{r'}{r} > \nu(r)\frac{r'-r}{r'}.$$

La dernière inégalité est une conséquence immédiate de l'application du théorème des accroissements finis à la fonction $\log r$. D'autre part,

$$\mathrm{N}(r', f) + m(r', f) = \mathrm{T}(r', f), \qquad \mathrm{N}(r', f) < \mathrm{T}(r', f),$$

car m, valeur moyenne de $\overset{+}{\log}$, est positive. Alors

$$\mathrm{N}(r', f) + \mathrm{N}\left(r', \frac{1}{f}\right) < \mathrm{T}(r', f) + \mathrm{T}\left(r', \frac{1}{f}\right) \leqq 2\,\mathrm{T}(r') + \overset{+}{\log} \frac{1}{|c_0|}.$$

Il s'ensuit que l'on a

$$\nu(r) < \frac{r'}{r' - r}\left[2\,\mathrm{T}(r') + \overset{+}{\log} \frac{1}{|c_0|}\right]$$

et finalement

$$(b) \qquad \overset{+}{\log}\,\nu(r) < \overset{+}{\log}\, r' + \overset{+}{\log} \frac{1}{r' - r} + 2 \log 2 + \overset{+}{\log}\,\mathrm{T}(r') + \overset{+}{\log}\,\overset{+}{\log} \frac{1}{|c_0|}.$$

Il nous reste à considérer les derniers termes de l'inégalité (16). Or

$$\log \left| \frac{r^2 - \bar{a} z}{r(z - a)} \right|$$

est la fonction de Green relative au cercle C_r et au pôle a. Elle est donc toujours positive ou nulle. Si a est extérieur au cercle C_ρ, c'est-à-dire dans la couronne comprise entre C_ρ et C_r, la fonction de Green est harmonique et régulière dans C_ρ et sa valeur moyenne sur C_ρ est sa valeur au centre, soit $\log \frac{r}{|a|}$. Mais, si a est à l'intérieur de C_ρ, nous remarquons que la valeur moyenne de la fonction de Green est la même que celle de

$$\log \left| \frac{r^2 - \bar{a} z}{r(z - a)} \right| - \log \left| \frac{\rho^2 - \bar{a} z}{\rho(z - a)} \right|,$$

car le second terme est évidemment nul sur C_ρ. Or, cette fonction est harmonique et régulière dans C_ρ, car le pôle a disparaît dans la différence. Il s'ensuit que sa valeur moyenne sur C_ρ est sa valeur au centre, soit

$$\log \frac{r}{|a|} - \log \frac{\rho}{|a|}.$$

Ceci montre que

$$\sum_i \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|\frac{r^2 - a_i z}{r(z-a_i)}\right| d\varphi - \sum_j \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|\frac{r^2 - b_j z}{r(z-b_j)}\right| d\varphi$$
$$= N(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) - \left[N(\rho, f) + N\left(\rho, \frac{1}{f}\right)\right] = \mathfrak{N}(r) - \mathfrak{N}(\rho),$$

où l'on a posé

$$\mathfrak{N}(r) = N(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right).$$

Mais nous savons que $N(r, f)$ et $N\left(r, \frac{1}{f}\right)$ sont des fonctions représentées par des contours polygonaux de pentes entières croissantes par rapport à $\log r$ (n° 10), c'est-à-dire des fonctions convexes de $\log r$. Par conséquent, $\mathfrak{N}(r)$ est une fonction convexe de $\log r$ et l'on a

$$\frac{\mathfrak{N}(r) - \mathfrak{N}(\rho)}{\log r - \log\rho} \leq \frac{\mathfrak{N}(r') - \mathfrak{N}(\rho)}{\log r' - \log\rho}.$$

Comme, en vertu du théorème des accroissements finis,

$$\log r - \log\rho < \frac{r-\rho}{\rho},$$
$$\log r' - \log\rho > \frac{r'-\rho}{r'},$$

on obtient *a fortiori*

$$\mathfrak{N}(r) - \mathfrak{N}(\rho) \leq \mathfrak{N}(r')\frac{r-\rho}{r'-\rho}\,\frac{r'}{\rho}.$$

Le second membre de cette inégalité donne une limitation de la somme des derniers termes de (16). Jusqu'à présent, nous nous sommes bornés à supposer $r' > r$, sans préciser. Pour simplifier les résultats, fixons-nous maintenant $r' > \rho$ et déterminons r par l'égalité

$$\frac{r-\rho}{r'-\rho}\,\frac{r'}{\rho} = \frac{1}{T(r')+2}.$$

Il est clair que r, déterminé par cette équation du premier degré, est compris entre ρ et r', car d'une part $r-\rho$ est positif comme $r'-\rho$ et le rapport $\frac{r-\rho}{r'-\rho}$ est inférieur à l'unité. Avec ces valeurs de ρ, r et r', on a

$$\mathfrak{N}(r) - \mathfrak{N}(\rho) \leq \mathfrak{N}(r')\frac{1}{T(r')+2} \leq \frac{2\,T(r') + \overset{+}{\log}\dfrac{1}{|c_0|}}{T(r')+2},$$

et, *a fortiori*,

$$(c)\qquad \mathfrak{N}(r) - \mathfrak{N}(\rho) = \sum_i \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|\frac{r^2 - \bar{a}_i z}{r(z - a_i)}\right| d\varphi$$

$$+ \sum_j \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|\frac{r^2 - \bar{b}_j z}{r(z - b_j)}\right| d\varphi \leqq 2 + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{c_0}\right|.$$

Le fait d'avoir déterminé r en fonction de r' nous conduit à chercher dans (b), une limite supérieure de $\overset{+}{\log}\dfrac{1}{r'-r}$ en fonction de r'. On a

$$r' - r = (r' - \rho)\left[1 - \frac{\rho}{r'[T(r') + 2]}\right] \geqq \frac{r' - \rho}{2},$$

car

$$\frac{\rho}{r'} < 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{T(r') + 2} < \frac{1}{2}.$$

Donc

$$(d)\qquad \overset{+}{\log}\frac{1}{r' - r} \leqq \overset{+}{\log}\frac{1}{r' - \rho} + \log 2.$$

Enfin, considérons le premier terme du deuxième membre de (16). D'après la définition de r, on a

$$\frac{1}{r - \rho} = \frac{[T(r') + 2]r'}{(r' - \rho)\rho},$$

$$\overset{+}{\log}\frac{1}{r - \rho} \leqq \overset{+}{\log}\frac{1}{r' - \rho} + \overset{+}{\log}\frac{1}{\rho} + \overset{+}{\log} r' + 2\log 2 + \overset{+}{\log} T(r')$$

et

$$\overset{+}{\log}\frac{2r}{(r - \rho)^2} + \log 2 \leqq \overset{+}{\log}\frac{1}{(r - \rho)^2} + \overset{+}{\log} 2r + \log 2$$

$$< 2\overset{+}{\log}\frac{1}{r - \rho} + \overset{+}{\log} r' + 2\log 2.$$

$$(e)\qquad \overset{+}{\log}\frac{2r}{(r - \rho)^2} + \log 2$$

$$\leqq 3\overset{+}{\log} r' + 2\overset{+}{\log}\frac{1}{r' - \rho} + 2\overset{+}{\log}\frac{1}{\rho} + 2\overset{+}{\log} T(r') + 6\log 2.$$

En ajoutant membre à membre les inégalités (a), (b), (c) et (e), et en tenant compte de (d), on obtient une nouvelle inégalité dont le premier membre est précisément égal au second membre de (16). On est donc conduit à une inégalité nouvelle, qui renforce (16) et qui

peut s'écrire

$$m\left(\rho, \frac{f'}{f}\right) \leqq 11 \log 2 + 2 + 4 \overset{+}{\log} r' + 3 \overset{+}{\log} \frac{1}{r'-\rho} + 2 \overset{+}{\log} \frac{1}{\rho} + 4 \overset{+}{\log} T(r') + 2 \overset{+}{\log} \overset{+}{\log} \frac{1}{|c_0|} + \overset{+}{\log} \frac{1}{|c_0|}.$$

En remplaçant $\log 2$ par le terme plus grand 2; $\overset{+}{\log} \overset{+}{\log} \frac{1}{|c_0|}$ par le terme plus grand $\overset{+}{\log} \frac{1}{|c_0|}$, et en écrivant finalement r à la place de r', on obtient la formule

$$(17) \qquad m\left(\rho, \frac{f'}{f}\right) < 24 + 4 \overset{+}{\log} r + 3 \overset{+}{\log} \frac{1}{r-\rho} + 2 \overset{+}{\log} \frac{1}{\rho} + 3 \overset{+}{\log} \frac{1}{|c_0|} + 4 \overset{+}{\log} T(r).$$

Cette formule nous donne la limitation supérieure cherchée de la moyenne de $\overset{+}{\log} \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|$, sur la circonférence C_ρ.

26. Second théorème fondamental. — Soient $f(z)$ une fonction méromorphe et

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_q \qquad (q \geqq 3)$$

un certain nombre de valeurs finies différentes. La connaissance de la distribution des zéros des équations

$$f(z) - \alpha_i = 0$$

permet de donner une limitation supérieure de la croissance de la fonction caractéristique $T(r)$, donc de l'ordre de $f(z)$. Le second théorème fondamental de M. R. Nevanlinna précise la limite supérieure de $T(r)$ à l'aide des expressions $N(r, \alpha_i)$. Pour établir ce théorème considérons les fonctions

$$F(z) = [f(z) - \alpha_1][f(z) - \alpha_2] \ldots\ldots [f(z) - \alpha_q];$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{f(z)-\alpha_1} + \frac{1}{f(z)-\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{f(z)-\alpha_q}.$$

L'évaluation des limites supérieure et inférieure de la moyenne logarithmique de $\Phi(z)$, permettra de déduire, par comparaison, la relation cherchée entre $T(r)$ et les $N(r, \alpha_i)$.

On a évidemment

$$\Phi(z) = \frac{1}{f(z)} \frac{f(z)}{f'(z)} \frac{F'(z)}{F(z)},$$

$$m(r, \Phi) \leq m\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + m\left(r, \frac{F'}{F}\right).$$

Si nous supposons que $f(z)$ admet, au voisinage de l'origine, le développement

$$f(z) = c_0 + c_h z^h + \ldots,$$

on déduira du premier théorème fondamental de M. Nevanlinna :

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) = m(r, f) + N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overset{+}{\log} \frac{1}{|c_0|};$$

$$m\left(r, \frac{f}{f'}\right) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + N\left(r, \frac{f'}{f}\right) - N\left(r, \frac{f}{f'}\right) + \overset{+}{\log} \left|\frac{c_0}{hc_h}\right|.$$

On peut transformer cette dernière égalité, en remarquant que, d'après la définition de $N(r, f)$, on peut écrire

$$N(r, uv) = N(r, u) + N(r, v) - \sum \log \frac{r}{|c_k|},$$

où les c_k désignent les points intérieurs au cercle C_r, qui sont en même temps zéros pour l'une des fonctions u, v et pôles pour l'autre. De la même manière,

$$N\left(r, \frac{1}{uv}\right) = N\left(r, \frac{1}{u}\right) + N\left(r, \frac{1}{v}\right) - \sum \log \frac{r}{|c_k|},$$

de sorte que

$$N(r, uv) - N\left(r, \frac{1}{uv}\right) = N(r, u) + N(r, v) - N\left(r, \frac{1}{u}\right) - N\left(r, \frac{1}{v}\right)$$

et, par conséquent,

$$N\left(r, \frac{f'}{f}\right) - N\left(r, \frac{f}{f'}\right) = N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N(r, f') - N(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right).$$

On en déduit, en remplaçant dans l'expression de $m\left(r, \frac{f}{f'}\right)$, $N\left(r, \frac{f'}{f}\right) - N\left(r, \frac{f}{f'}\right)$ par sa valeur,

$$m\left(r, \frac{f}{f'}\right) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + N(r, f') - N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$$
$$- N(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overset{+}{\log} \left|\frac{c_0}{hc_h}\right|.$$

En portant les valeurs de $m\left(r, \frac{1}{f}\right)$ et de $m\left(r, \frac{f'}{f}\right)$ dans le second membre de l'inégalité à laquelle satisfait $m(r, \Phi)$, on trouve

$$(18) \qquad m(r, \Phi) < m(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{F'}{F}\right) + N(r, f') - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \overset{+}{\log} \frac{1}{|hc_h|}.$$

Mais, d'autre part,

$$\Phi(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha_i}\left[1 + \sum_k{}' \frac{f(z) - \alpha_i}{f(z) - \alpha_k}\right],$$

Σ' désignant la somme pour $k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, q$. Désignons par δ un nombre plus petit que 1 et que toutes les distances $\alpha_i \alpha_k$ et considérons l'ensemble des points pour lesquels

$$|f(z) - \alpha_i| < \frac{\delta}{2q}.$$

Pour ces points, on a

$$|f(z) - \alpha_k| \geqq |\alpha_i - \alpha_k| - |f - \alpha_i| > \delta - \frac{\delta}{2q} > \frac{3\delta}{4},$$

car $q > 2$, par hypothèse. Par suite,

$$\left|\sum_k{}' \frac{f(z) - \alpha_i}{f(z) - \alpha_k}\right| < q \frac{\delta}{2q} \frac{4}{3\delta} = \frac{2}{3};$$

$$|\Phi(z)| \geqq \frac{1}{|f(z) - \alpha_i|}\left[1 - \left|\sum_k{}' \frac{f(z) - \alpha_i}{f(z) - \alpha_k}\right|\right] > \frac{1}{3|f(z) - \alpha_i|};$$

$$\overset{+}{\log}|\Phi(z)| > \overset{+}{\log} \frac{1}{|f(z) - \alpha_i|} - \log 3.$$

Si l'on désigne par σ_i l'ensemble des points de la circonférence C_r pour lesquels

$$|f(z) - \alpha_i| < \frac{\delta}{2q} \leqq \frac{\delta}{6},$$

on a, en ces points,

$$|f(z) - \alpha_k| > \frac{3\delta}{4};$$

donc les ensembles $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_q$ n'ont pas de points communs et l'on peut écrire

$$(19) \qquad m(r, \Phi) > \sum_{i=1}^{i=q} \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_i} \left[\overset{+}{\log} \frac{1}{|f(z) - \alpha_i|} - \log 3\right] d\theta.$$

Mais

$$\sum_i \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_i} \log 3\, d\theta < \log 3,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_i} \overset{+}{\log} \frac{1}{|f(z)-\alpha_i|}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} \frac{1}{|f(z)-\alpha_i|}\, d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma'_i} \overset{+}{\log} \frac{1}{|f(z)-\alpha_i|}\, d\theta,$$

où σ'_i désigne l'ensemble des points de la circonférence qui est complémentaire de σ_i, c'est-à-dire l'ensemble des points de la circonférence différents des points de σ_i. Sur σ'_i on a

$$|f(z)-\alpha_i| > \frac{\delta}{2q},$$

$$\frac{1}{|f(z)-\alpha_i|} < \frac{2q}{\delta}.$$

Donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma'_i} \overset{+}{\log} \frac{1}{|f(z)-a_i|}\, d\theta > m(r, \alpha_i) - \log \frac{2q}{\delta}$$

et, en portant dans (19) ces limites, on obtient finalement

$$(20) \qquad m(r, \Phi) > \sum_{i=1}^{i=q} m(r, \alpha_i) - \log 3 - q \log \frac{2q}{\delta}.$$

En comparant les inégalités (18) et (20), comme nous l'avons dit au début de ce paragraphe, on trouve

$$\sum_{i=1}^{q} m(r, \alpha_i) < m(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{F'}{F}\right)$$
$$+ N(r, f') - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \overset{+}{\log} \frac{3}{|hc_h|} + q \log \frac{2q}{\delta}.$$

Nous avons supposé jusqu'ici que les α_i étaient finis. Pour le cas des pôles, c'est-à-dire si un des α_i devient infini, il suffit de considérer l'inégalité précédente relative aux $q-1$ autres valeurs finies des α_i et d'ajouter l'égalité

$$m(r, \infty) = m(r, f).$$

On est ainsi conduit dans tous les cas, à l'inégalité

$$(21)\qquad \sum_{i=1}^{q} m(r, \alpha_i) < 2m(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{F'}{F}\right) + N(r, f') - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \overset{+}{\log}\frac{3}{|hc_h|} + q\log\frac{2q}{\delta}.$$

Or, le premier théorème de M. Nevanlinna (8) donne

$$T(r, f) = T(r, \alpha_i) + b_i(r),$$

donc,

$$m(r, \alpha_i) = T(r, f) - N(r, \alpha_i) - b_i(r),$$

où $b_i(r)$ est une fonction bornée. En remplaçant les $m(r, \alpha_i)$ par ces valeurs dans (21), on est conduit à l'inégalité fondamentale

$$(22)\qquad (q-2)\,T(r, f) < \sum_{i=1}^{q} N(r, \alpha_i) - N_1(r) + S(r),$$

où

$$N_1(r) = 2N(r, f) - N(r, f') + N\left(r, \frac{1}{f'}\right);$$

$$S(r) = m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{F'}{F}\right) + \overset{+}{\log}\frac{3}{|hc_h|} + q\log\frac{2q}{\delta} + \sum_{i=1}^{q} b_i(r).$$

Si la croissance de $S(r)$ est négligeable par rapport à celle de $T(r)$, l'inégalité (22) donne une limitation supérieure de l'ordre de croissance de $T(r, f)$ quand on connaît les ordres de croissance de $N(r, \alpha_i)$, c'est-à-dire la distribution des zéros des équations

$$f(z) - \alpha_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, q;\ q \geqq 3).$$

Nous sommes donc ramenés à étudier la croissance de $S(r)$.

En vertu de la limitation de la moyenne logarithmique donnée au paragraphe 25 par la formule (17), on a, en changeant ρ et r, respectivement, en r et R,

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{F'}{F}\right) < 48 + 8\overset{+}{\log} R + 6\overset{+}{\log}\frac{1}{R-r} + 4\overset{+}{\log}\frac{1}{r} + 3\overset{+}{\log}\frac{1}{|c_0|} + 3\overset{+}{\log}\frac{1}{|F(0)|} + 4\overset{+}{\log} T(R, f) + 4\overset{+}{\log} T(R, F).$$

$F(z)$ est un produit et, en vertu des propriétés de $T(r)$ établies au paragraphe 10, on a

$$T(R, F) \leqq \sum_i T(R, f - \alpha_i).$$

D'autre part, d'après la définition de $T(R, f - \alpha_i)$, on a

$$T(R, f - \alpha_i) \leqq T(R, f) + \overset{+}{\log} \alpha_i + \log 2,$$

alors,

$$T(R, F) \leqq q\, T(R, f) + \sum \overset{+}{\log} \alpha_i + q \log 2$$

et

$$\overset{+}{\log} T(R, F) \leqq \overset{+}{\log} T(R, f) + \log q$$
$$+ \sum \overset{+}{\log} \overset{+}{\log} \alpha_i + \log q + \overset{+}{\log} \log 2 + \log(q + 2).$$

En remplaçant $m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{F'}{F}\right)$ et $\overset{+}{\log} T(R, F)$ par les limites précédentes dans l'expression de $S(r)$, on obtient

$$S(r) < K + 8 \overset{+}{\log} R + 8 \overset{+}{\log} T(R, f) + 6 \overset{+}{\log} \frac{1}{R - r},$$

où K est une *constante supérieure ou égale à*

$$48 + 4 \log(q + 2) + 8 \log q + q \log \frac{2q}{\delta} + 3 \overset{+}{\log} \frac{1}{|c_0|} + 3 \overset{+}{\log} \frac{1}{|F(0)|}$$
$$+ \overset{+}{\log} \frac{3}{|hc_h|} + \sum b_i(r) + 4 \overset{+}{\log} \frac{1}{r} + 4 \sum \overset{+}{\log} \overset{+}{\log} \alpha_i.$$

Pour fixer les idées, supposons $r > 1$ et prenons $R = 2r$. Alors

$$\overset{+}{\log} \frac{1}{R - r} = \overset{+}{\log} \frac{1}{r} = 0,$$

et supposons d'abord que $f(z)$ soit d'ordre fini ρ, on aura

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log T(2r, f)}{\log 2r} = \rho.$$

Donc, pour r assez grand,

$$S(r) < K + 8 \log 2r + 8(\rho + \varepsilon) \log 2r$$

et, finalement,

$$S(r) < C \log r,$$

où C désigne une constante.

Cette analyse montre que $S(r)$, qui intervient dans l'inégalité (22), croît moins vite que $C \log r$ si $f(z)$ est d'ordre fini. Si $f(z)$ est d'ordre infini, on démontre que $S(r) < C[\log r + \log T(r)]$, sauf peut-être pour certaines valeurs de r que l'on peut enfermer dans des intervalles de longueur totale finie. Or, nous avons vu aux paragraphes 9 et 10 que $T(r, f)$ croît plus vite que $\log r$, à l'exception du cas des fractions rationnelles. Donc, à part ce cas, la croissance de $S(r)$ est *négligeable par rapport à la croissance de* $T(r)$, *et la formule* (22) *donne une limitation de la croissance de* $T(r)$ *quand on connaît la croissance des* $N(r, \alpha_i)$. C'est précisément cette relation qui était l'objet des recherches exposées dans ce paragraphe. On peut les résumer de la façon suivante :

Théorème. — *Soient $f(z)$ une fonction méromorphe et q valeurs différentes α_i avec $q \geqq 3$. Si l'on connaît la distribution des zéros des modules des équations $f(z) = \alpha_i$, c'est-à-dire les nombres $N(r, \alpha_i)$, la croissance de la fonction caractéristique est limitée par l'inégalité*

$$(q-2)\,T(r, f) < \sum_{i=1}^{q} N(r, \alpha_i) - N_1(r) + S(r),$$

où la croissance de $S(r)$ est négligeable par rapport à celle de $T(r)$.

On peut encore dire : *La limite inférieure*

$$\varliminf_{r=\infty} \frac{\sum_{i=1}^{q} N(r, \alpha_i)}{T(r, f)}$$

est supérieure ou égale à $q-2$.

Ce théorème a été démontré par M. R. Nevanlinna pour $q = 3$. L'extension au cas général est due à M. Littlewood et à M. Collingwood.

Voici la démonstration de l'inégalité

$$S(r) < C[\log r + \log T(r)]$$

vérifiée pour toute valeur de r à l'exception peut-être de valeurs particulières que l'on peut enfermer dans des intervalles de longueur totale finie.

Nous nous appuierons sur le théorème suivant de M. Borel qui s'applique à toute fonction continue croissante, positive, $T(r)$, qui croît indéfiniment avec r :

La fonction $T(r)$ vérifie l'inégalité

$$T\left(r+\frac{1}{\log T(r)}\right)<[T(r)]^k,$$

k désignant une constante supérieure à l'unité sauf peut-être pour certaines valeurs de r contenues dans des intervalles de longueur totale finie.

En effet, si l'inégalité est toujours vérifiée à partir d'une certaine valeur de r, le théorème est démontré; sinon, il existe des valeurs irrégulières aussi grandes qu'on le veut pour lesquelles l'inégalité n'est pas vérifiée. Posons alors

$$r'=r+\Delta r, \qquad \Delta r=\frac{1}{\log T(r)}.$$

Soit r_0 une valeur assez grande pour que $T(r_0)>1$ et

$$T(r'_0)\geqq[T(r_0)]^k;$$

r_1 la première valeur non inférieure à r'_0 pour laquelle

$$T(r'_1)\geqq[T(r_1)]^k, \qquad \ldots,$$

etc.; r_n la première valeur non inférieure à r'_{n-1} pour laquelle

$$T(r'_n)\geqq[T(r_n)]^k, \qquad \ldots,$$

etc. La suite r_n augmente indéfiniment à cause de l'inégalité

$$T(r_n)\geqq[T(r_0)^{k^n}$$

qui se déduit aussitôt des précédentes; et le second membre augmente indéfiniment avec n puisque $T(r_0)>1$.

Les valeurs irrégulières sont contenues dans les intervalles Δr, or

$$\Delta r_n=\frac{1}{\log T(r_n)}<\frac{1}{k^n}\cdot\frac{1}{\log T(r_0)},$$

donc la série Δr_n est convergente et la longueur totale des intervalles est finie.

Appliquons ce résultat à la fonction caractéristique $T(r)$: prenons

$$R=r+\frac{1}{\log T(r)},$$

r désignant une valeur régulière telle que $T(r) > 1$; on a

$$\overset{+}{\log}\frac{1}{R-r} = \overset{+}{\log}\log T(r) < \log T(r)$$

et, par suite,

$$S(r) < K + 8\overset{+}{\log} R + 8k\log T(r) + 6\log T(r),$$

ou

$$S(r) < K + 8\log(r+1) + (8k+6)\log T(r),$$

c'est-à-dire

$$S(r) < C[\log r + \log T(r)],$$

inégalité valable pour toutes les valeurs régulières assez grandes de r.

27. **Démonstration du théorème de M. Picard.** — Appliquons le théorème de M. Nevanlinna au cas de trois valeurs α_i. On a

$$T(r) < N(r, \alpha_1) + N(r, \alpha_2) + N(r, \alpha_3) + S(r),$$

où $S(r)$ est de l'ordre de $\log r$ ou de $\log r + \log T(r)$, suivant que $f(z)$ est une fonction méromorphe d'ordre fini ou infini. On a supprimé $N_1(r)$, qui est toujours positif, ce qui a renforcé l'inégalité.

Supposons que α_1, α_2, α_3 soient des valeurs telles que les équations

$$f(z) - \alpha_i = 0$$

n'aient chacune qu'un nombre fini de racines dans le plan. Alors $N(r, \alpha_1)$, $N(r, \alpha_2)$ et $N(r, \alpha_3)$ sont de l'ordre de $\log r$, et l'on est réduit à

$$T(r) < S(r) + H\log r,$$

H désignant une constante.

Alors, si $f(z)$ est une fonction d'ordre fini, on a

$$\underset{r=\infty}{\overline{\lim}}\frac{T(r)}{\log r} < C.$$

Si $f(z)$ est d'ordre infini, on a, pour les valeurs régulières de r,

$$T(r) < C[\log r + \log T(r)] + H\log r.$$

Comme $T(r)$ est une fonction croissante, on peut prendre r assez grand pour avoir

$$C\log T(r) < \frac{1}{2}T(r).$$

Mais alors, on a

$$\underset{r=\infty}{\overline{\lim}}\frac{T(r)}{\log r} < 2(C+H).$$

De toutes façons, nos hypothèses entraînent la conclusion que $T(r)$ ne peut croître plus vite que $\log r$. Or, nous avons démontré au paragraphe 12 que $\underline{\lim} \frac{T(r)}{\log r}$ n'est fini *que pour les fractions rationnelles* : $f(z)$ est donc dans ce cas une fraction rationnelle. Ce résultat constitue précisément le théorème de M. Picard :

Théorème. — *Si une fonction méromorphe $f(z)$ ne prend qu'un nombre fini de fois chacune de trois valeurs, cette fonction se réduit à une fraction rationnelle.*

Appelons *valeurs exceptionnelles* au sens de M. Picard ou valeurs lacunaires, les valeurs que $f(z)$ ne prend qu'un nombre fini de fois. Le théorème précédent peut s'énoncer aussi de la manière suivante :

Toute fonction méromorphe non rationnelle prend une infinité de fois toute valeur, sauf peut-être deux valeurs exceptionnelles au plus.

Cette démonstration du théorème de M. Picard appartient au groupe de celles qui ne font pas intervenir la fonction modulaire et dont la première a été donnée par M. Borel en 1896. Il faut toutefois remarquer que, si la fonction modulaire peut être éliminée de la démonstration, elle est cependant étroitement liée à la propriété elle-même et que, dans les extensions récentes qui ont été données de cette proposition, ce sont des valeurs de la fonction modulaire qui ont fourni les limites exactes intervenant dans ces extensions.

28. **Généralisation de M. Borel.** — Le second théorème de M. R. Nevanlinna permet de donner, de la généralisation de M. Borel, une démonstration analogue à la précédente.

Théorème. — *Étant donnée une fonction méromorphe $f(z)$ d'ordre fini ρ, il existe au plus deux valeurs α, β telles que, a_i et b_j désignant respectivement les racines des équations*

$$f(z) - \alpha = 0, \qquad f(z) - \beta = 0,$$

les séries

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|a_i|^{\lambda}} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|b_j|^{\lambda}}$$

convergent pour des valeurs de λ inférieures à ρ.

Ces valeurs α et β s'appellent *exceptionnelles au sens de M. Borel.*

On a, en effet, dans le cas contraire, trois valeurs α, β, γ telles que les séries relatives aux zéros a_i, b_j, c_k de $f-\alpha$, $f-\beta$, $f-\gamma$,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{|a_i|^\lambda},\quad \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|b_j|^\lambda},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|c_k|^\lambda},$$

convergent pour $\lambda<\rho$. Il en résulte que les intégrales telles que

$$\int_{r_0}^{\infty}\frac{\mathrm{N}(r,\alpha)}{r^{\lambda+1}}\,dr$$

sont convergentes et que, par conséquent,

$$\lim_{r=\infty}\frac{\mathrm{N}(r,\alpha)}{r^\lambda}=0.$$

Or, l'inégalité

$$\mathrm{T}(r)<\mathrm{N}(r,\alpha)+\mathrm{N}(r,\beta)+\mathrm{N}(r,\gamma)+\mathrm{S}(r)$$

donne

$$\frac{\mathrm{N}(r,\alpha)}{\mathrm{T}(r)}+\frac{\mathrm{N}(r,\beta)}{\mathrm{T}(r)}+\frac{\mathrm{N}(r,\gamma)}{\mathrm{T}(r)}+\frac{\mathrm{S}(r)}{\mathrm{T}(r)}>1.$$

Il existe une infinité de valeurs de r pour lesquelles

$$\mathrm{T}(r)>r^\lambda,$$

puisque λ est inférieur à ρ. Pour ces valeurs, on a

$$\frac{\mathrm{N}(r,\alpha)}{\mathrm{T}(r)}=\frac{\mathrm{N}(r,\alpha)}{r^\lambda}\cdot\frac{r^\lambda}{\mathrm{T}(r)};$$

dans le second membre, le premier facteur tend vers zéro et le second est inférieur à un, la limite est donc nulle. On peut donc écrire

$$\overline{\lim_{r=\infty}}\frac{\mathrm{S}(r)}{\mathrm{T}(r)}\geq 1$$

ou

$$\underline{\lim_{r=\infty}}\frac{\mathrm{T}(r)}{\mathrm{S}(r)}\leq 1.$$

Donc,

$$\underline{\lim_{r=\infty}}\frac{\mathrm{T}(r)}{\log r}\leq\underline{\lim_{r=\infty}}\frac{\mathrm{S}(r)}{\log r}<\mathrm{C},$$

C désignant une constante, et la conclusion est la même que précédemment.

On peut montrer que toute fonction méromorphe $f(z)$ d'ordre fini ρ qui admet deux valeurs exceptionnelles, au sens de M. Picard ou au sens de M. Borel, est nécessairement d'ordre entier.

29. Valeurs exceptionnelles de M. R. Nevanlinna. — Les deux théorèmes fondamentaux de M. Nevanlinna permettent d'analyser d'une manière très profonde la distribution dans le plan des zéros des différentes équations

$$f(z) - \alpha = 0.$$

D'après le premier théorème fondamental, on a

$$m(r, \alpha) + N(r, \alpha) = T(r) + b(r),$$

où $b(r)$ est une fonction *bornée* de r. Donc,

$$\frac{m(r, \alpha)}{T(r)} + \frac{N(r, \alpha)}{T(r)} = 1 + \frac{b(r)}{T(r)}.$$

Prenons une suite infinie $r_1, r_2, \ldots$ de valeurs de r augmentant indéfiniment et telle que

$$\frac{m(r, \alpha)}{T(r)}$$

ait pour limite λ. Il s'ensuit que, pour ces valeurs,

$$\lim \frac{N(r, \alpha)}{T(r)} = 1 - \lambda$$

et, en particulier,

$$\underline{\lim}_{r=\infty} \frac{m(r, \alpha)}{T(r)} = 1 - \overline{\lim}_{r=\infty} \frac{N(r, \alpha)}{T(r)}.$$

Si l'on pose

$$\delta(\alpha) = \underline{\lim}_{r=\infty} \frac{m(r, \alpha)}{T(r)} = 1 - \overline{\lim}_{r=\infty} \frac{N(r, \alpha)}{T(r)},$$

$\delta(\alpha)$ *est compris entre* 0 *et* 1. Lorsque α est une valeur exceptionnelle au sens de M. Picard, on a $\delta(\alpha) = 1$.

Le second théorème fondamental donne

$$(q-2)\,\mathrm{T}(r) < \sum_{i=1}^{q} \mathrm{N}(r,\, \alpha_i) + \mathrm{S}(r).$$

Prenons une suite infinie de valeurs de r augmentant indéfiniment et choisies de manière à avoir

$$\mathrm{S}(r) < \mathrm{C}[\log r + \log \mathrm{T}(r)],$$

ce qui est toujours possible, l'inégalité précédente donne, pour chaque limite de $\dfrac{\mathrm{N}(r,\, \alpha_i)}{\log r}$ ainsi obtenue,

$$\sum_{i=1}^{q} \left[1 - \lim \frac{\mathrm{N}(r,\, \alpha_i)}{\mathrm{T}(r)} \right] \leqq 2\,;$$

or

$$1 - \lim \frac{\mathrm{N}(r,\, \alpha_i)}{\mathrm{T}(r)} \geqq 1 - \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\mathrm{N}(r,\, \alpha_i)}{\mathrm{T}(r)} = \delta(\alpha_i),$$

ce qui montre que les $\delta(\alpha)$ vérifient, quel que soit le nombre q, la relation

$$\sum_{i=1}^{q} \delta(\alpha_i) \leqq 2.$$

Étant donnée une fonction méromorphe $f(z)$, on peut attacher à chaque valeur α un nombre $\delta(\alpha)$, qu'on appelle *déficience* ou *défaut* de la valeur α relativement à $f(z)$. La déficience mesure en quelque sorte l'affaiblissement de la densité des zéros de $f(z) - \alpha$ dans le plan. On appelle *valeur déficiente* ou *exceptionnelle au sens de M. Nevanlinna* toute valeur α dont la déficience est différente de zéro. L'ensemble des valeurs déficientes d'une fonction méromorphe $f(z)$ est dénombrable. En effet, quel que soit l'entier n, il ne saurait y avoir plus de n valeurs dont la déficience soit supérieure à $\frac{2}{n}$, car la somme des n déficiences est au plus égale à 2.

D'après cette définition, une valeur ordinaire ou non déficiente est telle que $\delta(\alpha) = 0$.

Un grand nombre de problèmes se posent, dont beaucoup ne sont

pas encore résolus, relativement à ces notions de défaut et de valeurs déficientes. En voici quelques-uns proposés par M. Nevanlinna.

Peut-on construire une fonction méromorphe admettant des valeurs données $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ avec des défauts donnés? On connaît certaines solutions de ce problème, mais on n'en possède pas la solution générale. A titre d'exemple, indiquons que la fonction entière

$$f(z) = \int_0^z e^{-u^q}\,du$$

admet $q+1$ valeurs déficientes : l'infini et q valeurs finies, α_i, avec les défauts

$$\delta(\infty) = 1, \qquad \delta(\alpha_i) = \frac{1}{q}.$$

Ces $q+1$ valeurs sont des valeurs asymptotiques de $f(z)$, c'est-à-dire des valeurs limites de $f(z)$ lorsque z s'éloigne indéfiniment sur des chemins déterminés.

Toute valeur déficiente de $f(z)$ est-elle aussi une valeur asymptotique? Pour toutes les fonctions connues jusqu'à présent, il en est ainsi, mais on n'a pas démontré ce fait. D'ailleurs, la réciproque est évidemment fausse, puisqu'on connaît des fonctions dont l'ensemble des valeurs asymptotiques a la puissance du continu.

D'autre part, on sait que le nombre des valeurs asymptotiques d'une fonction entière d'ordre fini ρ ne peut dépasser $2\rho+1$ hypothèse de M. A. Denjoy démontrée par M. Ahlfors. Ce théorème n'est exact pour une fonction méromorphe que si cette fonction admet une valeur exceptionnelle au sens de M. Picard. On peut donc se demander si l'existence d'une valeur déficiente, de défaut donné, ne permettrait pas de limiter le nombre des valeurs asymptotiques en fonction de l'ordre.

30. **Applications**. — Dans les numéros précédents, nous avons employé l'inégalité (22) du second théorème de M. Nevanlinna sans tenir compte du terme $-N_1(r)$. Nous n'avons fait que renforcer l'inégalité. Faisons maintenant intervenir ce terme. On a posé

$$N_1(r) = 2\,N(r, f) - N(r, f') + N\left(r, \frac{1}{f'}\right).$$

En désignant par b'_j les pôles de $f'(z)$, on a

$$N(r, f) = \sum_i \log \frac{r}{|b_i|},$$

$$N(r, f') = \sum_j \log \frac{r}{|b'_j|}.$$

Or, il est évident que les b'_j ne sont autres que les b_j avec un ordre de multiplicité augmenté de 1. Donc, la différence

$$2\,N(r, f) - N(r, f')$$

est positive ou nulle et contient les mêmes termes que $N(r, f)$ avec un ordre de multiplicité diminué de 1. Les pôles simples n'y figurent donc pas. De la même manière, les zéros d'ordre de multiplicité λ de $f(z) - \alpha$, où α désigne une constante, sont des zéros de $f'(z)$ avec l'ordre de multiplicité $\lambda - 1$. Donc $N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ contient tous les termes de tous les $N\left(r, \frac{1}{f-\alpha}\right)$ avec un ordre de multiplicité diminué de 1, c'est-à-dire toutes les racines multiples des équations $f(z) = \alpha$. Alors, si l'on désigne par $N_1(r, \alpha_i)$ la somme des mêmes termes que $N(r, \alpha_i)$ comptés chacun avec un ordre de multiplicité diminué de 1, on a évidemment

$$N_1(r) \geqq \sum_{i=1}^{q} N_1(r, \alpha_i).$$

Posons

$$\overline{N(r, \alpha_i)} = N(r, \alpha_i) - N_1(r, \alpha_i) = \sum_k \log \frac{r}{|a_k|},$$

la somme étant étendue aux racines a_k de $f(z) - \alpha_i = 0$, où $|a_k| < r$ et *comptées chacune une seule fois, quel que soit son ordre de multiplicité.*

Avec ces notations, l'inégalité (22) peut s'écrire

$$(23) \qquad (q-2)\,T(r) < \sum_{i=1}^{q} \overline{N(r, \alpha_i)} + S(r).$$

Tous les théorèmes (§ 26, 27, 28, 29), démontrés à partir de l'inégalité (22), peuvent donc être repris à partir de l'inégalité (23). Les démonstrations sont tout à fait semblables.

C'est ainsi, par exemple, qu'on peut établir la proposition :

Étant donnée une fonction méromorphe $f(z)$, il ne peut exister plus de deux valeurs α et β, telles que les équations $f(z)-\alpha=0$, $f(z)-\beta=0$ n'aient qu'un nombre fini de racines simples, doubles ou triples.

Posons, par définition,

$$\overline{\delta(\alpha)}=1-\overline{\lim_{r=\infty}}\,\frac{\overline{N(r,\alpha)}}{T(r)}.$$

On peut démontrer, à partir de (23), des propriétés de $\overline{\delta(\alpha)}$, analogues à celles du défaut $\delta(\alpha)$. De plus, on a évidemment

$$\overline{\delta(\alpha)}\geqq\delta(\alpha),$$

puisque

$$\overline{N(r,\alpha)}\leqq N(r,\alpha),$$

la dernière égalité n'ayant lieu que si toutes les racines de $f(z)-\alpha=0$ sont simples et la précédente, si le nombre des racines multiples est faible par rapport au nombre des racines simples.

La différence

$$\mu(\alpha)=\overline{\delta(\alpha)}-\delta(\alpha)$$

mesure en quelque sorte le caractère de multiplicité des racines correspondant à la valeur α relativement à la fonction $f(z)$. C'est pourquoi on a appelé ce nombre : *indice de multiplicité.*

On peut démontrer que, quel que soit le nombre q, on a

$$\sum_{i=1}^{q}\mu(\alpha_i)\leqq 2,$$

ce qui permet d'établir qu'il ne saurait exister de fonction méromorphe admettant plus de quatre valeurs α_i, telles que les racines de $f(z)-\alpha_i=0$ soient toutes multiples.

Indiquons encore que l'inégalité (23) permet de préciser les théorèmes d'unicité donnés au paragraphe 24. C'est ainsi que l'on a démontré la proposition : *Il ne peut exister plus de deux fonctions prenant aux mêmes points quatre valeurs distinctes, abstraction faite des ordres de multiplicité.*



CHAPITRE V.

FAMILLES NORMALES DE FONCTIONS.

31. **Définitions.** — Dans les Chapitres précédents, nous nous sommes occupés des *modules* des zéros des fonctions méromorphes. Nous allons passer maintenant à l'étude des *arguments* de ces zéros, ou, plus précisément, de la distribution des modules et des arguments. Une des méthodes les plus fécondes consiste à *fractionner* le domaine d'existence de la fonction et à introduire les familles normales de fonctions.

Considérons un ensemble infini borné de points. Le théorème de Cantor nous apprend que cet ensemble a toujours au moins un point limite. Si, au lieu d'un ensemble de points, nous considérons un ensemble de fonctions, cette propriété fondamentale ne lui appartient pas en général. Par exemple, la famille de fonctions de la variable réelle x,

$$f_n(x) = \sin nx,$$

n désignant un entier, n'admet pas de fonction limite.

Nous sommes ainsi conduits à distinguer deux catégories d'ensembles de fonctions : les ensembles analogues aux ensembles de points, tels que toute suite infinie d'éléments admette au moins une fonction limite, et les ensembles de fonctions ne possédant pas cette propriété.

On dit que les fonctions faisant partie de la première catégorie d'ensembles forment des familles normales de fonctions.

Plus précisément : *Une famille de fonctions $f_n(x)$ est normale si, de toute suite infinie de fonctions appartenant à la famille, on peut toujours extraire une suite partielle convergeant uniformément vers une fonction limite qui peut être une constante finie ou infinie.*

On dit que la suite

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x), \quad \ldots$$

converge uniformément vers une fonction limite finie $f(x)$ si, pour chaque nombre positif ε arbitrairement petit, donné, on peut déterminer un entier p, indépendant de x, tel que

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

pour $n > p$, quel que soit x.

Cette fonction limite peut être une constante. Si elle est infinie, il faut modifier la définition de la convergence uniforme et dire que $f_n(x)$ a pour limite la constante infinie si l'on a $\left|\frac{1}{f_n(x)}\right| < \varepsilon$ pour $n > p$.

L'ensemble des fonctions limites d'une famille normale forme l'ensemble dérivé du premier. Cet ensemble dérivé est fermé, c'est-à-dire qu'il contient toutes ses fonctions limites. On peut d'ailleurs remarquer que si une famille est normale, la famille dérivée l'est aussi.

Au lieu de considérer une suite infinie de fonctions $f_n(x)$, on peut prendre la série dont les termes sont :

$$u_1(x) = f_1(x), \qquad u_2(x) = f_2(x) - f_1(x), \qquad \ldots,$$
$$u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), \qquad \ldots.$$

La somme des n premiers termes de cette série est $f_n(x)$. Donc, si la suite $f_n(x)$ a une limite, la série $\Sigma u_n(x)$ est convergente.

Réciproquement, soit une série

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

uniformément convergente. La suite des sommes partielles

$$f_1(x) = u_1(x), \qquad f_2(x) = u_1(x) + u_2(x), \qquad \ldots,$$
$$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x), \qquad \ldots$$

converge uniformément vers la somme de la série donnée.

Le problème fondamental qui va nous occuper est le suivant :

Quels sont les caractères permettant d'affirmer qu'un ensemble de fonctions admet une fonction limite ?

De tels caractères s'appelleront des critères de familles normales.

L'étude de cette question est assez avancée pour les fonctions d'une variable réelle ou complexe qui sont des fonctions de point. Elle présente beaucoup d'intérêt au point de vue du calcul fonctionnel. Lorsqu'un nombre (longueur d'un arc, aire d'une surface, etc.) dépend d'une ou de plusieurs fonctions, il est relativement facile de voir si ce nombre dépend d'une manière continue de ces fonctions; mais, afin de pouvoir appliquer les théorèmes classiques de l'analyse, il importe de s'assurer que l'ensemble de ces fonctions possède la propriété d'accumulation des ensembles de points. Et cette vérification est souvent malaisée.

32. **Fonctions d'une variable réelle.** — Considérons une famille de fonctions d'une variable réelle

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad \ldots,\quad f_n(x),\quad \ldots$$

continues dans un intervalle, (0, 1) par exemple.

$f_n(x)$ étant continue, il s'ensuit que, étant donné un nombre arbitrairement petit ε, on peut déterminer un nombre $\delta_n(\varepsilon)$ tel que l'inégalité

$$|x' - x''| < \delta_n(\varepsilon)$$

entraîne

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon$$

quels que soient x' et x'' dans l'intervalle. On peut évidemment toujours remplacer δ_n par un nombre plus petit. Prenons pour $\delta_n(\varepsilon)$ le plus grand nombre possédant cette propriété et considérons les δ_n correspondant à toutes les fonctions de la suite. Il n'est pas sûr qu'on puisse trouver un δ commun non nul convenant à toutes les fonctions. En d'autres termes, il n'est pas sûr que la limite inférieure des quantités $\delta_n(\varepsilon)$, pour ε donné, soit différente de zéro. Par exemple, pour la suite de fonctions

$$f_n(x) = e^{-nx^2}$$

n désignant un entier, on ne peut pas trouver un δ convenant à toutes les fonctions, au voisinage de l'origine.

Nous dirons, avec Ascoli, qu'*une famille de fonctions est également continue quand, à chaque nombre ε, on peut faire correspondre un nombre δ tel que l'inégalité*

$$|x' - x''| \leq \delta$$

entraîne l'inégalité

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

quels que soient x' et x'' dans l'intervalle considéré et quelle que soit la fonction $f(x)$ de la famille.

Nous dirons qu'une famille de fonctions $f(x)$ est *bornée* lorsqu'il existe une constante M telle que l'on ait

$$|f(x)| < \mathrm{M}$$

quel que soit x dans l'intervalle et quelle que soit la fonction de la famille.

L'égale continuité d'une famille de fonctions entraîne l'existence des fonctions limites et réciproquement, comme le montre le théorème suivant dû à Arzelà.

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille bornée de fonctions d'une variable réelle soit telle que, de toute suite infinie de fonctions de la famille, on puisse extraire une suite partielle convergeant uniformément vers une fonction limite, est que cette famille soit également continue.*

Quand une suite infinie contient une suite partielle uniformément convergente, nous dirons aussi qu'elle est génératrice de cette dernière.

Montrons d'abord qu'une famille également continue est bornée dès que les valeurs des fonctions ont un module borné en un seul point. Supposons que l'ensemble des valeurs prises par les fonctions pour une valeur particulière de x, par exemple pour $x = 0$, soit borné. Soit donc $|f(0)| < \mathrm{A}$, A désignant une constante.

Les fonctions étant également continues, on peut trouver un δ positif, tel que l'inégalité

$$|x' - x''| < \delta$$

entraîne, dans tout l'intervalle et pour chaque fonction $f(x)$,

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

ε étant choisi à l'avance. Or, on peut couvrir l'intervalle $(0, 1)$ au moyen d'un nombre fini N d'intervalles de longueurs inférieures ou égales à δ.

Soit x, un point de l'intervalle $(0, 1)$; il est séparé de 0 par $N' \leqq N - 1$ extrémités $x_1, x_2, \ldots, x_{N'}$ des intervalles précédents. On a

$$\begin{aligned} &|f(x_1) - f(0)\ \ | < \varepsilon, \\ &|f(x_2) - f(x_1\ )| < \varepsilon, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &|f(x\ \ ) - f(x_{N'})| < \varepsilon, \end{aligned}$$

d'où, en ajoutant,

$$|f(x) - f(0)| < (N' + 1)\varepsilon \leqq N\varepsilon$$

et

$$|f(x)| < A + N\varepsilon.$$

Les fonctions sont bornées dans l'intervalle $(0, 1)$. Ainsi, *si les fonctions sont bornées en un point, elles sont bornées dans tout l'intervalle.*

Il en résulte que si elles ne sont pas bornées en un point, elles ne sont bornées en aucun point de l'intervalle.

Passons à la démonstration du théorème d'Arzelà.

La condition d'égale continuité est nécessaire. Supposons que la famille bornée soit normale; de toute suite infinie, on peut donc extraire une suite partielle $f_n(x)$ convergeant uniformément vers une fonction limite $\varphi(x)$ finie, évidemment continue; ε étant donné, on peut donc trouver un nombre positif δ_1 tel que l'inégalité

$$|x' - x''| \leqq \delta_1$$

entraîne

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part, les fonctions de la suite partielle $f_n(x)$ tendant uniformément vers $\varphi(x)$, on peut déterminer un rang fini n_0 convenable, à partir duquel on ait, quel que soit x,

$$|f_n(x\ \ ) - \varphi(x\ \ )| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

En particulier,

$$|f_n(x') - \varphi(x')| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|f_n(x'') - \varphi(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

L'inégalité

$$|x' - x''| \leqq \delta_1$$

entraîne donc, quel que soit n supérieur à n_0,

$$|f_n(x') - f_n(x'')| \leq |f_n(x') - \varphi(x')| + |\varphi(x') - \varphi(x'')| + |\varphi(x'') - f_n(x'')| < \varepsilon.$$

Les n_0 fonctions initiales sont continues; donc on peut trouver un nombre δ_2 non nul, tel que si $|x' - x''| \leq \delta_2$, l'oscillation de chacune des n_0 fonctions soit inférieure à ε. Si l'on prend alors pour δ le plus petit des nombres δ_1 et δ_2, on voit bien que la suite partielle est également continue. On en déduit aisément que la famille tout entière est également continue. Dans le cas contraire, il existerait une valeur ε pour laquelle, quelque petit que soit δ, il y aurait une fonction au moins de la famille pour laquelle l'inégalité

$$|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$$

serait vérifiée pour deux points x' et x'' distants au plus de δ. Prenons successivement $\delta = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, nous aurons des fonctions

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x), \quad \ldots$$

de la famille vérifiant l'inégalité précédente en des couples de points dont la distance est inférieure ou égale à $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. Il y a une infinité de fonctions différentes puisque chaque fonction est continue. De cette suite, on peut extraire, par hypothèse, une suite partielle

$$f_{p_1}(x), \quad f_{p_2}(x), \quad \ldots, \quad f_{p_n}(x), \quad \ldots$$

uniformément convergente, donc également continue, ce qui est impossible d'après la définition même des fonctions $f_n(x)$. Cette contradiction démontre la proposition. La condition est bien nécessaire.

La condition est suffisante. Pour le démontrer nous utiliserons un procédé de « filtrage » dont le principe est dû à M. Roussel. Supposons que les fonctions de la famille soient également continues. Puisque la famille est bornée, l'ensemble des points $f(0)$ est borné, et par conséquent, possède au moins un point a_1 à distance finie, limite des points $f_n(0)$. A partir d'un entier n_0 convenable, on a

$$|f_n(0) - a_1| < \frac{1}{4},$$

pour $n > n_0$. Les fonctions étant également continues, on peut déterminer un nombre δ_1 tel que l'inégalité

$$|x' - x''| < \delta_1$$

entraîne

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{1}{4}.$$

Divisons l'intervalle total $(0, 1)$ en un nombre fini r d'intervalles partiels d'amplitude inférieure à δ_1 par les points $x_1, x_2, \ldots, x_r = 1$.

Dans l'intervalle $(0, x_1)$ l'oscillation de chaque $f(x)$ est inférieure à $\frac{1}{4}$. Alors

$$|f_n(x) - f_n(0)| < \frac{1}{4}$$

et

$$|f_n(x) - a_1| \leqq |f_n(x) - f_n(0)| + |f_n(0) - a_1| < \frac{1}{2}$$

pour toutes les fonctions de la suite, pour lesquelles $n > n_0$. Toutes ces fonctions possèdent la propriété que, dans la bande limitée par $x = 0$ et $x = x_1$, leurs points représentatifs sont contenus dans le rectangle de hauteur 1 et dont le centre a pour ordonnée a_1. Considérons seulement ces fonctions que nous appellerons $f_n^1(x)$.

L'ensemble des points

$$f_1^1(x_1), \quad f_2^1(x_1), \quad \ldots, \quad f_n^1(x_1), \quad \ldots$$

admet au moins un point limite a_2, situé sur le côté $x = x_1$ du rectangle précédent.

Comme nous l'avons fait pour le premier intervalle, nous extrairons de la suite $f_n^1(x)$ une suite partielle $f_n^2(x)$ telle que les points représentatifs de $f_n^2(x)$, pour $x_1 \leqq x < x_2$, soient contenus dans le rectangle de hauteur 1 et dont le centre a pour ordonnée a_2. Or, le nombre des intervalles (x_i, x_{i+1}) est égal à r. Donc, après r opérations de filtrage analogues, on aura obtenu une suite partielle que nous désignerons par

$$f_1^{1)}(x), \quad f_2^{1)}(x), \quad \ldots, \quad f_n^{1)}(x), \quad \ldots,$$

extraite de la suite donnée et telle que chaque fonction $f_n^{1)}(x)$ ait la propriété suivante : Dans chaque intervalle (x_i, x_{i+1}) les points représentatifs de $f_n^{1)}(x)$ sont contenus dans le rectangle de hauteur 1,

et dont le centre a pour ordonnée a_{i+1}. En d'autres termes, pour chaque valeur de x, les points représentatifs des valeurs de $f_n^{(1)}(x)$ sont tous intérieurs à un segment de longueur 1.

Cette suite représente une première étape de notre filtrage et nous allons la prendre comme point de départ pour les opérations suivantes. En remplaçant 1 par $\frac{1}{2}$, on peut déterminer un nombre δ_2 tel que si

$$|x' - x''| < \delta_2,$$

on ait

$$|f_n^{(1)}(x') - f_n^{(1)}(x'')| < \frac{1}{8}.$$

Comme précédemment, nous pourrons extraire de la suite $f_n^{(1)}(x)$ une nouvelle suite partielle

$$f_1^{(2)}(x) = f_1^{(1)}(x), \quad f_2^{(2)}(x), \quad f_3^{(2)}(x), \quad \ldots, \quad f_n^{(2)}(x), \quad \ldots,$$

dont chaque fonction, sauf peut-être la première, aura la propriété suivante : Dans chaque nouvel intervalle, les points représentatifs de $f_n^{(2)}(x)$ sont contenus, pour $n \geqq 2$, dans un rectangle de hauteur $\frac{1}{2}$. En d'autres termes, pour chaque valeur de x, les points représentatifs des valeurs de $f_n^{(2)}(x)$ sont, sauf peut-être $f_1^{(2)}(x)$, contenus dans un segment de longueur $\frac{1}{2}$, emboîté dans le segment de longueur 1 qui contenait les valeurs de $f_n^{(1)}(x)$.

En continuant, on aboutit ainsi à des suites partielles dont chacune est extraite de la précédente, de la forme

$$\begin{array}{llllll}
f_1^{(1)}(x), & f_2^{(1)}(x), & f_3^{(1)}(x), & \ldots, & f_n^{(1)}(x), & \ldots, \\
f_1^{(1)}(x), & f_2^{(2)}(x), & f_3^{(2)}(x), & \ldots, & f_n^{(2)}(x), & \ldots, \\
f_1^{(1)}(x), & f_2^{(2)}(x), & f_3^{(3)}(x), & \ldots, & f_n^{(3)}(x), & \ldots, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll}
f_1^{(1)}(x), & f_2^{(2)}(x), & f_3^{(3)}(x), & \ldots, & f_{p-1}^{(p-1)}(x), & f_p^{(p)}(x), & f_{p+1}^{(p)}(x), & \ldots, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots
\end{array}$$

La $p^{\text{ième}}$ suite est composée de fonctions $f_n^{(p)}(x)$ qui possèdent la propriété suivante : Pour une valeur arbitraire de x, les points représentatifs des valeurs de $f_n^{(p)}(x)$ sont contenus, sauf peut-être les $p-1$ premiers, dans un segment de longueur $\frac{1}{p}$ emboîté dans le segment précédent de longueur $\frac{1}{p-1}$.

Pour chaque valeur de x, tous ces segments emboîtés ont un point commun unique d'ordonné y. Soit

$$y = f_0(x),$$

la fonction de x ainsi définie. Je dis que la suite

$$f_1^1(x),\quad f_2^2(x),\quad \ldots,\quad f_n^n(x),\quad \ldots$$

converge uniformément vers $f_0(x)$ dans l'intervalle $(0, 1)$.

En effet, donnons-nous un nombre positif ε arbitrairement petit et choisissons l'entier p assez grand pour que $\frac{1}{p}$ soit inférieur à ε. Pour $n > p$, les points représentatifs des valeurs des fonctions $f_n^n(x)$, qui appartiennent toutes à la suite $f_n^p(x)$, sont à l'intérieur d'un segment de longueur $\frac{1}{p}$ contenant le point $f_0(x)$. On a donc pour $n > p$,

$$|f_0(x) - f_n^n(x)| < \varepsilon,$$

ce qui montre que cette suite converge uniformément vers $f_0(x)$: $f_0(x)$ est donc une fonction continue. Le procédé d'extraction de la suite diagonale $f_n^n(x)$ du tableau à double entrée représentant l'ensemble des fonctions $f_n^p(x)$ porte le nom de *procédé diagonal*.

Remarque. — Si la famille n'est pas bornée, la condition d'égale continuité est encore suffisante. En effet, le raisonnement est le même si l'ensemble des valeurs $f(0)$ admet au moins une valeur limite finie. Si, au contraire, cet ensemble n'admet que des limites infinies, on peut choisir une suite partielle $f_n(x)$ telle que $f_n(0)$ ait pour limite $+\infty$ par exemple. Alors, l'inégalité

$$|f_n(x)| \geq |f_n(0)| - N\varepsilon$$

qui se déduit de l'égale continuité, montre que la suite $f_n(x)$ a pour limite uniformément la constante $+\infty$.

On peut d'ailleurs supprimer, de l'énoncé du théorème, l'hypothèse que la famille est bornée en convenant d'appeler également continue toute famille telle que le nombre δ, correspondant à ε, convienne, soit à $f(x)$, soit à $\frac{1}{f(x)}$.

33. **Fonctions de deux variables réelles.** — Considérons une famille de fonctions de deux variables réelles $f(x, y)$ définies dans un domaine fermé (D).

On dit que les fonctions sont également continues si, à chaque nombre positif ε, on peut faire correspondre un nombre positif δ tel que les inégalités

$$|x' - x''| < \delta, \qquad |y' - y''| < \delta$$

entraînent

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon,$$

quels que soient (x', y'), (x'', y'') dans le domaine (D) et quelle que soit la fonction de la famille.

Le théorème d'Arzelà s'étend aux fonctions de plusieurs variables réelles.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille bornée de fonctions de deux variables réelles soit telle que toute suite infinie de fonctions de cette famille soit génératrice d'une suite partielle ayant une fonction limite, est que les fonctions de la famille soient également continues.

Supposons, par exemple, que les fonctions soient définies et également continues dans un rectangle dont les côtés se trouvent respectivement sur Ox et sur Oy. S'il n'en était pas ainsi, on enfermerait le domaine (D) supposé borné dans un rectangle de côtés parallèles aux axes, et l'on complèterait la définition de la fonction à l'extérieur de (D) et à l'intérieur du rectangle en la faisant varier linéairement sur chaque segment parallèle à Ox : l'égale continuité n'est pas altérée. En faisant $x = 0$, le théorème d'Arzelà relatif à une variable réelle y, conduit à la construction d'une fonction limite $f_1(0, y)$. Cette fonction va jouer ici un rôle analogue à la constante a_1 du paragraphe précédent. Par un procédé de filtrage des fonctions tout à fait semblable à celui de ce paragraphe, on obtient une suite de fonctions de deux variables dont les points représentatifs sont contenus, pour chaque couple de valeurs (x, y) représentant les coordonnées d'un point du rectangle, à l'intérieur d'un segment parallèle à Oz, de longueur $\frac{1}{p}$ et emboîté dans le segment précédent de longueur $\frac{1}{p-1}$. On en déduit comme précédemment l'existence d'une fonction limite continue $f_0(x, y)$.

On démontrerait, comme au paragraphe 32, que la condition est nécessaire.

La remarque du paragraphe précédent est encore valable.

34. **Fonctions d'une variable complexe.** — Considérons une famille de fonctions $f(z)$ d'une variable complexe $z = x + iy$, définies dans un domaine (D).

On dit que ces fonctions sont également continues dans ce domaine, si, à tout nombre positif ε arbitrairement choisi, on peut faire correspondre un nombre positif δ tel que l'inégalité

$$|z' - z''| < \delta$$

entraîne

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon.$$

quels que soient z' et z'' dans (D) et quelle que soit la fonction $f(z)$ de la famille.

Si les fonctions d'une famille $f(z)$ sont également continues, de toute suite infinie de fonctions $f(z)$, on peut extraire une suite partielle tendant uniformément vers une fonction limite.

Considérons la suite de fonctions de la famille

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots,$$

avec

$$f_n(z) = P_n(x, y) + iQ_n(x, y).$$

Cette suite est composée de fonctions également continues. Il est évident que les suites $P_n(x, y)$ et $Q_n(x, y)$ sont alors formées de fonctions également continues.

Par conséquent, de la suite $P_n(x, y)$, on peut extraire une suite partielle

$$P_{\alpha_1}(x, y), \quad P_{\alpha_2}(x, y), \quad \ldots, \quad P_{\alpha_n}(x, y), \quad \ldots$$

qui converge uniformément dans (D) vers une fonction limite $P_0(x, y)$. De la suite correspondante,

$$Q_{\alpha_1}(x, y), \quad Q_{\alpha_2}(x, y), \quad \ldots, \quad Q_{\alpha_n}(x, y), \quad \ldots$$

formée de fonctions également continues, on peut extraire une suite partielle

$$Q_{\beta_1}(x, y), \quad Q_{\beta_2}(x, y), \quad \ldots, \quad Q_{\beta_n}(x, y), \quad \ldots$$

qui converge uniformément dans (D) vers une fonction limite $Q_0(x, y)$. Il est manifeste que la suite formée par les fonctions $P_{\beta_n}(x, y)$ converge uniformément vers $P_0(x, y)$, car les P_{β_n} sont pris dans la suite P_{α_n}. Par conséquent, la suite

$$f_{\beta_1}(z), \quad f_{\beta_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{\beta_n}(z), \quad \ldots$$

converge uniformément vers

$$f_0(z) = P_0(x, y) + i\,Q_0(x, y).$$

Réciproquement, si une suite de fonctions bornées d'une variable complexe est normale, on voit que les fonctions sont également continues, puisque les familles $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ étant normales et bornées, ces deux familles sont également continues.

35. **Fonctions holomorphes.** — Une famille de fonctions holomorphes *bornées* dans un domaine se comporte comme un ensemble de points, c'est-à-dire que toute suite infinie de fonctions de la famille est génératrice d'une suite partielle qui converge vers une fonction limite. En d'autres termes :

Théorème. — *Toute suite infinie de fonctions holomorphes bornées dans un domaine* (D) *est génératrice d'une suite partielle convergeant uniformément vers une limite.*

Cette limite est une fonction holomorphe dans tout domaine intérieur au domaine (D).

Soit la suite de fonctions holomorphes et bornées

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots.$$

Supposons que

$$|f_n(z)| < M,$$

quel que soit n et quel que soit z dans (D). Les fonctions $f_n(z)$ sont également continues dans tout domaine (D′) complètement intérieur à (D), c'est-à-dire dont tous les points, même frontières, sont des points intérieurs à (D). Soit (D″) un domaine complètement intérieur à (D) et contenant (D′); désignons par d le minimum de la distance des points du contour de (D′) aux points du contour (C) de (D″), c'est-à-dire la distance des deux contours; (D′) étant complètement

intérieur à (D''), d n'est pas nul. La valeur de $f(z)$, en tout point intérieur à (D'), est donnée par l'intégrale de Cauchy. On a donc

$$f(z') = \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z'},$$

$$f(z'') = \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z''},$$

z' et z'' étant intérieurs à (D') et ζ sur le contour (C),

$$f(z') - f(z'') = \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} \frac{(z' - z'')f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z')(\zeta - z'')}.$$

Donc,

$$|f(z') - f(z'')| < \frac{|z' - z''|}{2\pi}\int_{(C)} \frac{M\,|d\zeta|}{|\zeta - z'|\,|\zeta - z''|} < \frac{|z' - z''|\,Ml}{2\pi d^2},$$

l désignant la longueur du contour (C) de (D''), car, z' et z'' étant intérieurs à (D'), on a $|\zeta - z'| > d$ et $|\zeta - z''| > d$.

En définitive,

$$|f(z') - f(z'')| < K\,|z' - z''|,$$

où K est une constante qui ne dépend pas des fonctions de la suite.

Donc, les fonctions sont également continues, et en vertu du théorème du paragraphe 34, elles forment une famille dont toute suite infinie est génératrice d'une fonction limite.

Considérons alors une suite de domaines (D'_1), (D'_2), ..., (D'_n), ..., tous complètement intérieurs à (D) et tels que chacun contienne le précédent. Nous supposerons, en outre, que tout point intérieur à (D) est intérieur à (D'_n) pour n assez grand. Étant donnée une suite infinie de fonctions de la famille, nous pouvons en extraire une suite partielle $f_n^1(z)$ convergeant uniformément dans (D'_1); de celle-ci, nous pouvons extraire une suite $f_n^2(z)$ convergeant uniformément dans (D'_2), etc. Par le procédé diagonal, nous en déduisons une suite $f_n^n(z)$ qui converge uniformément dans chaque (D'_n) et, par conséquent, autour de chaque point intérieur à (D) vers une fonction limite $f(z)$ définie en tout point intérieur à (D).

Cette fonction limite est holomorphe dans tout domaine (D'), d'après le théorème de Weierstrass suivant :

Théorème de Weierstrass. — *Une suite de fonctions, holomorphes*

dans un domaine (D) *et continues sur le contour* (C) *de ce domaine, qui converge uniformément sur le contour* (C), *converge uniformément vers une fonction limite dans tout le domaine* (D). *La fonction limite d'une suite de fonctions holomorphes convergeant uniformément dans le domaine* (D) *est une fonction holomorphe en tout point intérieur à* D. *La suite des dérivées d'ordre* p *converge uniformément vers la dérivée d'ordre* p *de la fonction limite à l'intérieur de tout domaine complètement intérieur à* (D).

Pour démontrer la première partie de ce théorème, appliquons le critère de Cauchy relatif à la convergence des séries. Si la suite

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots$$

est uniformément convergente sur le contour (C) de (D), la série

$$u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots,$$

où

$$u_1(z) = f_1(z), \qquad \ldots, \qquad u_n(z) = f_n(z) - f_{n-1}(z), \qquad \ldots$$

est uniformément convergente sur le contour. Ceci exige que, pour $n > n_0$, on ait, quel que soit p et quel que soit ζ sur le contour,

$$(24) \qquad |u_{n+1}(\zeta) + u_{n+2}(\zeta) + \ldots + u_{n+p}(\zeta)| < \varepsilon.$$

Or, la fonction $u_{n+1}(z) + \ldots + u_{n+p}(z) = f_{n+p}(z) - f_n(z)$ est holomorphe dans (D) et continue sur (C). Donc, elle atteint son module maximum sur le contour. Ceci entraîne que l'on ait l'inégalité (24) dans tout le domaine (D). La série converge donc, en vertu du critère de Cauchy, dans tout le domaine (D), c'est-à-dire que la suite $f_n(z)$ converge uniformément dans le domaine fermé (D). La première partie du théorème est démontrée.

Montrons maintenant que la limite est une fonction holomorphe dans D.

Soit $f_0(\zeta)$ la fonction vers laquelle la suite converge uniformément sur le contour (C). Considérons la fonction

$$f_0(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} \frac{f_0(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z},$$

qui est holomorphe en tout point intérieur à (D) et dont la dérivée

d'ordre p est

$$f_0^p(z) = \frac{p!}{2i\pi}\int_{(C)} \frac{f_0(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{p+1}}.$$

La fonction $f_0(\zeta)$ étant la limite uniforme de la suite $f_n(\zeta)$ sur le contour (C) de (D), on a, à partir d'un rang n_0 convenable et pour tout point ζ du contour

$$|f_n(\zeta) - f_0(\zeta)| < \varepsilon.$$

D'autre part, l'intégrale de Cauchy donne l'expression de la fonction holomorphe $f_n(z)$ et celle de ses dérivées en chaque point du domaine (D),

$$f_n(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} \frac{f_n(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z},$$

$$f_n^p(z) = \frac{p!}{2i\pi}\int_{(C)} \frac{f_n(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{p+1}}.$$

Donc, à partir du rang n_0, on a, en chaque point du domaine (D′) complètement intérieur à D,

$$|f_n(z) - f_0(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{(C)} \frac{f_n(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \int_{(C)} \frac{f_0(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2\pi}\left|\int_{C} \frac{d\zeta}{\zeta - z}\right| < \frac{\varepsilon l}{2\pi d},$$

et

$$|f_n^p(z) - f_0^p(z)| < \frac{p!\,l\varepsilon}{2\pi d^{p+1}},$$

où l désigne la longueur du contour (C) et d la distance non nulle du contour de (D′) au contour (C). Ces inégalités montrent que les suites $f_n(z)$ et $f_n^p(z)$ convergent uniformément vers la fonction $f_0(z)$ et vers sa dérivée $f_0^p(z)$.

Nous avons supposé, dans la seconde partie de la démonstration, que le contour (C) était rectifiable. S'il n'en était pas ainsi, on devrait remplacer (C) par un contour rectifiable (C′), intérieur à (D) et aussi voisin que l'on veut de (C); d'après la première partie, la convergence est uniforme sur le contour (C′) et la démonstration du théorème reste la même.

Voici maintenant une proposition importante relative à la distribution des valeurs d'une suite uniformément convergente :

Théorème. — *Considérons une suite de fonctions* $f_n(z)$, *holomorphes dans un domaine* (D), *qui converge uniformément dans l'intérieur de ce domaine. Si la fonction limite prend la valeur* a *en un point* z_0, *les fonctions de la suite, à partir d'un certain rang, prennent dans tout cercle de centre* z_0 *autant de fois la valeur* a *qu'il y a d'unités dans l'ordre de multiplicité du zéro* z_0 *de* $f(z) - a$, *à moins que la fonction limite* $f(z)$ *ne soit la constante* a.

Nous disons qu'une suite converge uniformément *dans l'intérieur* d'un domaine (D) lorsqu'elle converge uniformément dans tout domaine fermé (D′) complètement intérieur à (D).

Considérons une circonférence (γ), de centre z_0, de rayon assez petit pour que l'équation

$$f(z) - a = 0$$

n'ait pas à l'intérieur, ni sur la circonférence, d'autre racine que $z = z_0$, ce qui est possible lorsque $f(z)$ n'est pas identique à la constante a, et soit p l'ordre de multiplicité de cette racine. On sait que

$$p = \frac{1}{2i\pi}\int_{(\gamma)} \frac{f'(z)}{f(z) - a}\, dz.$$

Mais, la suite $f_n(z)$ tend uniformément vers $f(z)$ dans l'intérieur de (D). Donc, $f'_n(z)$ converge uniformément vers $f'(z)$ et $f_n(z) - a$ converge uniformément vers $f(z) - a$, z étant sur la circonférence (γ). D'autre part, $|f(z) - a|$ ayant sur (γ) un minimum non nul, il en sera de même pour $|f_n(z) - a|$ pour n assez grand. Par suite, le quotient $\frac{f'_n(z)}{f_n(z) - a}$ converge uniformément vers $\frac{f'(z)}{f(z) - a}$ sur (γ), et l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(\gamma)} \frac{f'_n(z)}{f_n(z) - a}\, dz$$

tend vers l'intégrale correspondante pour $f(z)$, soit p. Comme cette intégrale est égale à un entier, car elle représente le nombre des racines de $f_n(z) = a$ contenues dans (γ), on voit que, à partir d'un certain rang, elle est constamment égale à p. Donc, à partir d'un

certain rang, toutes les équations

$$f_n(z) - a = 0$$

ont p racines à l'intérieur de (γ).

Remarquons que le théorème cesse d'être exact lorsque la limite est la constante a. Par exemple, la suite $f_n = a + \frac{z}{n}$ a pour limite a dans tout domaine borné (D), mais f_n ne prend pas la valeur a si ce domaine ne contient pas l'origine.

36. **Fonctions méromorphes.** — On peut toujours ramener l'étude des fonctions méromorphes à celle des fonctions continues à l'aide d'une projection stéréographique sur une sphère de Riemann.

Prenons une sphère de rayon unité dont le centre O est l'origine des affixes du plan des Z et faisons, à partir du pôle nord Ω de cette sphère, situé sur la perpendiculaire au plan menée par O, une projection stéréographique sur le plan. A chaque point d'affixe Z du plan correspond son image sphérique, le point P. L'homologue du point à l'infini du plan est le pôle nord Ω de la sphère; à l'origine O, correspond le pôle sud.

On appelle *distance sphérique* de deux points Z et Z′ la longueur du plus petit arc de grand cercle qui passe par les images P et P′ de Z et Z′. On désigne cette distance par $[Z, Z']$. Une fonction $Z = f(z)$ est sphériquement continue en un point z si, à tout nombre positif ε, on peut faire correspondre un nombre positif δ tel que l'inégalité

$$|z' - z| < \delta$$

entraîne

$$[Z, Z'] < \varepsilon.$$

Une fonction sphériquement continue en tous les points d'un domaine est uniformément sphériquement continue dans le domaine, c'est-à-dire que, à tout ε, on peut faire correspondre un δ tel que l'inégalité

$$|z' - z''| < \delta,$$

z' et z'' étant deux points quelconques du domaine, entraîne

$$[Z', Z''] < \varepsilon.$$

La démonstration est la même que pour le cas de la continuité ordinaire.

Si le domaine de définition de la fonction comprend le point à l'infini du plan des z, on pourra aussi remplacer le point z par son image sphérique, et l'inégalité

$$|z - z'| < \delta$$

par l'inégalité

$$[z, z'] < \delta.$$

Les résultats sont les mêmes et le point à l'infini joue le même rôle que les autres points du plan.

A l'aide de la notion de distance sphérique, on peut ramener les fonctions méromorphes aux fonctions continues, grâce à la propriété :

Toute fonction méromorphe est continue sphériquement.

Soit $Z = f(z)$ une fonction méromorphe. Si z_0 n'est pas un pôle de $f(z)$, lorsque z a pour limite z_0, le point Z a pour limite Z_0, et l'image P de Z a pour limite l'image P_0 de Z_0, donc $[Z_0, Z]$ a pour limite zéro en même temps que $|z - z_0|$ et la fonction est sphériquement continue en z_0.

Si z_0 est un pôle de $f(z)$, l'image sphérique correspondant à la valeur $f(z_0)$ est le pôle Ω. Mais si z s'approche indéfiniment de z_0, $f(z)$ augmente indéfiniment, d'après la définition même du pôle. Donc, $|Z|$ est très grand et l'image sphérique de Z est un point P contenu dans une petite calotte autour de Ω. Par conséquent, $[\infty, Z]$ tend vers zéro, en même temps que $|z - z_0|$, et la fonction est continue en z_0.

La proposition est démontrée.

Considérons maintenant une famille de fonctions méromorphes $f(z)$ dans un domaine (D).

On définit l'*égale continuité sphérique* de la même manière que l'égale continuité habituelle :

Les fonctions d'une famille de fonctions méromorphes dans un domaine (D) *sont également continues sphériquement dans ce domaine si, à tout nombre positif* ε *arbitraire, on peut faire correspondre un nombre positif* δ *tel que l'inégalité*

$$|z' - z''| < \delta$$

entraîne l'inégalité

$$[f(z'), f(z'')] < \varepsilon,$$

quels que soient z' et z'' dans le domaine (D) *et quelle que soit la fonction de la famille.*

On démontre, comme au paragraphe 32, la proposition suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de fonctions méromorphes dans un domaine soit normale dans ce domaine est que ces fonctions soient également continues sphériquement dans ce domaine.

Rappelons et précisons le sens des mots « famille normale » pour le cas des fonctions méromorphes. Une famille est normale si, de toute suite infinie de fonctions de cette famille, on peut extraire une suite partielle convergeant uniformément vers une fonction limite dans l'intérieur du domaine. Nous sommes ainsi conduits à préciser le sens des mots « convergence uniforme » pour les suites de fonctions méromorphes.

Considérons la suite de fonctions méromorphes

$$f_1(z),\quad f_2(z),\quad \ldots,\quad f_n(z),\quad \ldots$$

et supposons qu'elle ait une fonction limite $f(z)$. La convergence est uniforme si, étant donné un nombre positif ε arbitraire, on peut trouver un entier n_0 indépendant de z tel que pour $n > n_0$, on ait

$$[Z_n, Z] < \varepsilon,$$

quel que soit z dans le domaine.

En d'autres termes, si l'on ne se rapporte pas à la sphère, la convergence est uniforme si, pour $n > n_0$:

1° Quand z n'est pas un pôle de $f(z)$: $f_n(z)$ a pour limite $f(z)$ uniformément autour de z quand n croît indéfiniment.

2° Si z est un pôle, $\frac{1}{f_n(z)}$ converge vers zéro uniformément autour de z lorsque n croît indéfiniment.

Remarquons que $f(z)$ est une fonction méromorphe puisque, autour de chaque point z, $f(z)$ ou $\frac{1}{f(z)}$ est holomorphe. Cette fonction peut être une constante, finie ou infinie.

37. **Exemples de familles normales.** — Nous avons vu au paragraphe 35 que les fonctions holomorphes bornées dans leur ensemble dans un domaine forment une famille normale. Or, si les fonctions sont bornées, $|f_n(z)| < M$, les images sphériques de $Z_n = f_n(z)$ ne peuvent pas pénétrer dans la calotte dont le sommet est Ω, et dont la frontière est l'image du cercle $|Z| = M$. Il y a donc une région de la sphère où les images de Z ne pénètrent pas. Ce résultat peut être étendu au cas où il y a sur la sphère une calotte quelconque où les images de Z ne pénètrent pas. En d'autres termes :

Théorème. — *Soit une famille de fonctions méromorphes $f(z)$ telle que les points d'affixes $f(z)$ ne puissent pas pénétrer dans une région du plan des Z. Cette famille est normale.*

En effet, soit A un point intérieur au domaine interdit aux fonctions $f(z)$. De A comme centre et avec un rayon convenablement petit δ, on peut décrire un cercle entièrement situé dans la région exceptionnelle. Mais alors, on a pour toutes les fonctions, et quel que soit z dans le domaine,

$$|f(z) - A| > \delta.$$

Si l'on pose

$$g(z) = \frac{\delta}{f(z) - A},$$

les fonctions $g(z)$ sont holomorphes et bornées, car $|g(z)| < 1$. Les fonctions $g(z)$ forment donc une famille normale (n° 35).

Considérons alors une suite infinie de fonctions $f(z)$. La suite correspondante des $g(z)$ est génératrice d'une suite partielle convergente $g_n(z)$.

Soit $g(z)$ la limite de la suite $g_n(z)$. A partir d'un rang convenable, on a

$$|g_n(z) - g(z)| < \varepsilon,$$

ε étant donné à l'avance. Supposons que $g(z)$ ne soit pas identiquement nulle; alors $g(z)$ n'admet aucun zéro puisque les $g_n(z)$ n'ont aucun zéro et que, dans le voisinage de tout zéro de $g(z)$, il devrait y avoir des zéros de $g_n(z)$ pour n assez grand. On a donc $|g(z)| > k$ dans le domaine, et, pour n assez grand, $|g_n(z)| > k$, puisque $g_n(z)$ converge uniformément vers $g(z)$. Donc, si nous

posons

$$f_n(z) = \frac{\delta}{g_n(z)} + A, \qquad f(z) = \frac{\delta}{g(z)} + A.$$

$f(z)$ est homolorphe, et l'on a

$$f(z) - f_n(z) = \delta \left[\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g_n(z)} \right] = \frac{\delta [g_n(z) - g(z)]}{g(z)\, g_n(z)}.$$

Donc,

$$|f(z) - f_n(z)| < \frac{\delta}{k^2} |g_n(z) - g(z)|$$

et $f_n(z)$ converge uniformément vers $f(z)$.

Si $g(z)$ est la constante zéro, l'égalité

$$\frac{1}{f_n(z)} = \frac{g_n(z)}{1 + A\, g_n(z)}$$

montre que $\frac{1}{f_n(z)}$ converge uniformément vers zéro, donc que $f_n(z)$ converge uniformément vers la constante infinie.

Donc, dans tous les cas, la suite $f_n(z)$ a une fonction limite. La famille est normale.

Le théorème précédent peut s'étendre : *Une famille de fonctions méromorphes ayant un arc de courbe interdit, ou un ensemble de points interdits, est une famille normale.*

Plus précisément encore : *Si les fonctions d'une famille ne peuvent prendre aucune de trois valeurs, la famille est normale.*

Nous allons démontrer ce théorème fondamental. Soient a, b, c les valeurs exceptionnelles. On peut supposer que ces valeurs sont 0, 1, ∞. En effet, si les $f(z)$ ne prennent pas les valeurs a, b, c, les fonctions

$$g(z) = \frac{f(z) - a}{f(z) - b} : \frac{c - a}{c - b}$$

ne peuvent pas prendre les valeurs 0, 1, ∞. Nous allons donc envisager ces fonctions. Comme elles ne prennent pas la valeur infinie, elles sont holomorphes. On est ainsi conduit à démontrer le théorème suivant :

38. **Théorème fondamental.** — *Une famille de fonctions holomorphes dans un domaine qui ne prennent ni la valeur* 0, *ni la valeur* 1, *est normale dans le domaine.*

La démonstration que nous donnerons de ce théorème repose sur certaines propriétés d'une représentation conforme particulière.

Faisons une représentation conforme du plan des Z sur un plan Z' de manière à faire correspondre, au demi-plan supérieur Z, l'intérieur d'un triangle curviligne équilatéral dont les côtés sont des arcs de cercle faisant entre eux un angle nul et qui est inscrit dans le cercle

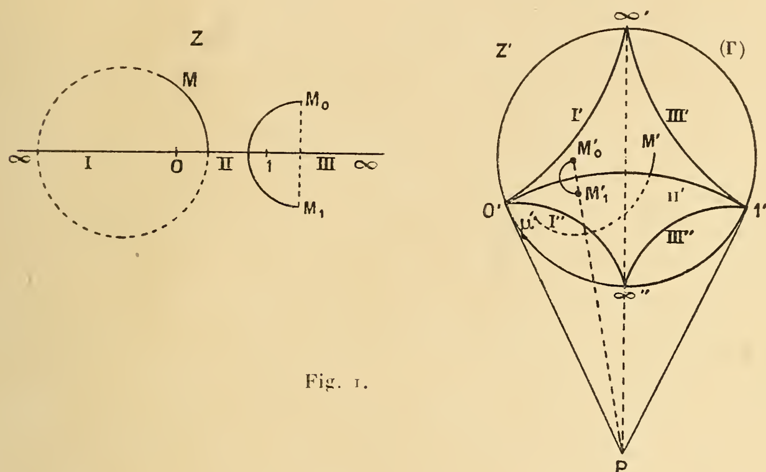


Fig. 1.

de centre $Z' = 0$ et de rayon 1, cercle que nous appellerons le cercle fondamental (Γ). Les côtés du triangle sont des arcs de cercle orthogonaux à (Γ). On sait que l'on peut faire correspondre aux points 0, 1, ∞ du plan Z les trois sommets $0'$, $1'$, ∞' du triangle. Les trois côtés I', II', III' du triangle correspondent respectivement aux segments $(-\infty, 0)$ ou I, $(0, 1)$ ou II et $(1, \infty)$ ou III, de l'axe réel du plan Z (*fig.* 1).

Si un point M décrit un chemin dans le demi-plan supérieur Z, le point homologue M' décrit un chemin intérieur au triangle $0'$, $1'$, ∞'. Si le point M décrit un chemin qui coupe l'axe réel du plan des Z, par exemple entre 0 et 1, le point homologue M' sort du triangle en traversant le côté II'. Mais il reste toujours à l'intérieur du cercle fondamental. En effet, soit M_1 un point du chemin décrit par M, situé dans le demi-plan inférieur du Z. Le point M_0 qui a pour affixe le nombre imaginaire conjugué de l'affixe de M_1 est symétrique de M_1 par rapport à l'axe réel. D'après le théorème de Schwartz, l'homo-

logue M'_0 de M_0 est l'image du point M'_1 par rapport au cercle (C) qui porte l'arc II'. Les images des côtés I' et III' par rapport à ce cercle (C) sont les arcs I'' et III'' inverses des arcs I' et III' par rapport à (C), ces deux arcs se coupent au point ∞'' diamétralement opposé au point ∞' sur le cercle (Γ). Le triangle I''II'III'' est l'image du triangle I' II' III' par rapport à (C) car II' est sa propre image. Et puisque M'_0 est dans le premier triangle, M'_1 est dans le second.

Il résulte de ce qui précède que la représentation conforme fait correspondre le plan entier des Z, dans lequel le passage du demi-plan supérieur au demi-plan inférieur s'effectue toujours à travers le segment II, au quadrilatère curviligne $0'\infty'1'\infty''$.

Il est clair que si l'on passe du demi-plan supérieur Z au demi-plan inférieur Z en traversant par exemple, le segment III, le plan entier aura comme correspondant un quadrilatère curviligne ayant pour côtés les arcs I', II' et les images de ces arcs par rapport à l'arc III'. Et ainsi de suite. D'une façon générale, si le point M décrit un chemin qui traverse un certain nombre de fois l'axe réel du plan Z sur les segments I, II, III, pour aboutir en un point M_1, le point homologue M' décrira un chemin qui traverse des côtés du triangle initial et des images de ces côtés pour aboutir en un point M'_1, qui est toujours à l'intérieur du cercle fondamental. Chaque fois que le point M traversera un segment de l'axe réel, il faudra construire, dans le plan Z', le triangle curviligne, image, par rapport au côté traversé, du triangle curviligne adjacent à ce côté dans lequel se trouvait M' avant la traversée. On construit ainsi une infinité de triangles curvilignes, tous intérieurs à (Γ) et dont les côtés sont orthogonaux à la circonférence (Γ).

Désignons par

$$Z' = \lambda(Z)$$

la fonction qui réalise cette représentation conforme. La fonction $\lambda(Z)$ n'est pas uniforme. En effet, supposons qu'un point décrive un chemin fermé, qui part de M, traverse l'axe réel entre 0 et 1, passe dans le demi-plan inférieur, traverse de nouveau l'axe réel entre $-\infty$ et 0 pour revenir en M. Le point homologue part de M' dans le triangle initial, traverse le côté II' de ce triangle initial et entre dans le triangle I''II'III''. Il sort de ce triangle par le côté I'', homologue de I, et aboutit en un point μ', évidemment distinct de M', puisqu'il

est dans le triangle curviligne inverse de I″II′III″ par rapport au cercle qui porte I″ et ce dernier triangle n'a aucun point commun avec le premier. Donc $\lambda(Z)$ est une fonction non uniforme de Z. Quand Z est différent de 0, 1, ∞, les valeurs de la fonction $\lambda(Z)$ sont les affixes de points situés à l'intérieur du cercle fondamental. Les homologues des points 0, 1 et ∞ se trouvent sur la circonférence du cercle fondamental (Γ) d'après la définition même de la correspondance conforme.

Soit maintenant une famille de fonctions $f(z)$ holomorphes dans un domaine simplement connexe (D) où elles ne prennent jamais ni la valeur 0, ni la valeur 1. Posons

$$g(z) = \lambda[f(z)].$$

Les fonctions $g(z)$ sont holomorphes dans le domaine (D) : la fonction $\lambda(Z)$ est bien multiforme et change de détermination lorsque Z décrit un contour fermé contenant l'un des points 0 ou 1; mais, le chemin décrit par $Z = f(z)$ lorsque z décrit un contour fermé dans (D) ne peut tourner autour des points 0 ou 1.

En effet, si $f(z)$ décrivait un contour fermé autour de 0, par exemple, l'argument de $Z = f(z)$ varierait d'un multiple de 2π lorsque z décrit son contour fermé et par conséquent $f(z)$ aurait au moins un zéro à l'intérieur de ce contour, c'est-à-dire à l'intérieur de (D) puisque ce domaine est simplement connexe. Alors, si $f(z)$ traverse l'axe réel du plan Z entre 0 et 1, par exemple, pour passer du demi-plan supérieur au demi-plan inférieur, il doit traverser de nouveau l'axe réel toujours entre 0 et 1 pour revenir au demi-plan supérieur. Sinon il tournerait autour de 0 ou de 1, ce qui est impossible. Suivons alors le chemin homologue : il part du triangle I′II′III′, passe par exemple en traversant II′ dans le triangle I″II′III″, puis dans de nouveaux triangles, mais revient finalement dans le triangle initial en traversant de nouveau II′, homologue de $(0, 1)$. A un chemin fermé décrit par $f(z)$ correspond donc un chemin fermé dans le plan Z'. En d'autres termes, la fonction $g(z) = \lambda[f(z)]$ est uniforme. Elle est d'ailleurs holomorphe, puisque autour d'une valeur z', $f(z)$ est holomorphe; comme $f(z')$ n'est égal ni à *zéro* ni à *un*, $\lambda(Z)$ est holomorphe autour de $Z' = f(z')$, donc $\lambda[f(z)]$ est holomorphe autour de z'.

On a d'autre part $|g(z)| < 1$. La famille des fonctions $g(z)$ est une famille normale : de chaque suite infinie, on peut extraire une

suite partielle $g_n(z)$ qui converge uniformément vers une fonction limite $g(z)$ dans l'intérieur de (D). Toute valeur de $g(z)$ correspondant à un point z' intérieur à (D) est l'affixe d'un point intérieur à (Γ). Car si ce point était sur la circonférence, les fonctions $g_n(z)$ devraient prendre des valeurs de module unité dans le voisinage de z', ce qui est impossible, puisque toutes les valeurs de $g_n(z)$ sont intérieures à (Γ). Ce raisonnement serait en défaut si $g(z)$ était identique à une constante de module unité, cas que nous écarterons d'abord.

Soit (D') un domaine intérieur à (D), les valeurs correspondantes Z' de $g(z)$ sont situées dans un cercle (Γ') concentrique à (Γ) et de rayon inférieur à *un*. Soit (Γ'') un cercle concentrique contenant (Γ') et contenu dans (Γ). Dans (Γ''), la relation

$$Z' = \lambda(Z)$$

définit une fonction inverse

$$Z = \mu(Z')$$

qui est holomorphe et uniforme comme on le voit immédiatement. Cette fonction est appelée une fonction modulaire. La fonction

$$Z = \mu[g(z)] = f(z)$$

est donc holomorphe et uniforme dans (D').

Comme $g_n(z)$ converge uniformément vers $g(z)$ dans (D'), pour n assez grand tous les points $g_n(z)$ seront dans (Γ''). Or, dans ce domaine $\mu(Z')$ est uniformément continue; étant donné ε, il lui correspond δ tel que l'inégalité

$$|Z'_1 - Z'_2| < \delta$$

entraîne

$$|\mu(Z'_1) - \mu(Z'_2)| < \varepsilon.$$

Or, prenons n assez grand pour que $g_n(z)$ soit dans (Γ'') et que l'on ait, pour $n > n_0$,

$$|g_n(z) - g(z)| < \delta,$$

on en déduira

$$|\mu[g_n(z)] - \mu[g(z)]| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon,$$

pour $n > n_0$ lorsque z est dans (D'). Donc $f_n(z)$ converge uniformément vers $f(z)$ dans l'intérieur de (D).

Nous avons supposé que $g(z)$ n'était pas une constante de module égal à *un*. Supposons maintenant qu'il en soit ainsi. Admettons que chaque fonction $g_n(z)$ soit définie de manière que, pour une valeur fixe z_0 intérieure à (D), on choisisse pour la valeur

$$(Z'_n)_0 = g_n(z_0) = \lambda[f_n(z_0)]$$

un point du quadrilatère $0'\infty''1'\infty'$. Le point limite Z'_0 de la suite $(Z'_n)_0$ est situé dans ce quadrilatère. S'il est distinct d'un sommet, la constante $g(z) = Z'_0$ est inférieure en module à l'unité et nous rentrons dans le cas étudié précédemment. Supposons que Z'_0 soit un des sommets, $0'$ par exemple, alors $f_n(z_0)$ a nécessairement pour limite la valeur 0 comme le montre la représentation conforme.

Supposons donc que les $f_n(z)$ aient 0 comme limite. Considérons la suite des fonctions

$$\varphi_n(z) = \frac{1 + \sqrt{f_n(z)}}{2},$$

définies de manière que, au point z_0, le radical $\sqrt{f_n(z_0)}$ ait une valeur déterminée. $\varphi_n(z)$ est holomorphe, car $f_n(z)$ est holomorphe et ne s'annule pas dans le domaine, et différente de 0 et de 1. En effet, $f_n(z)$ ne prend pas la valeur 1, donc $g_n(z)$ ne prend pas la valeur *un*. De même, pour que $\varphi_n(z)$ soit nul, il faudrait que $\sqrt{f_n} = -1$, où $f_n(z) = 1$, contrairement à l'hypothèse.

D'autre part, $\varphi_n(z_0)$ a pour limite $\frac{1}{2}$, donc $\varphi_n(z)$ converge uniformément vers une fonction limite $\varphi(z)$, et $f_n(z)$ converge uniformément vers

$$f(z) = [2\varphi(z) - 1]^2.$$

Si $f_n(z_0)$ avait pour limite *un* ou l'infini, on remplacerait f_n par $1 - f_n$ ou par $\frac{1}{f_n}$ et l'on serait ramené au cas que nous venons d'examiner.

Donc, dans tous les cas, une suite infinie de fonctions de la famille est génératrice d'une suite convergente : la famille est normale.

Nous avons supposé simplement connexe le domaine (D). Dans le cas contraire, on partagerait (D') en un certain nombre de domaines simplement connexes : (D'_1), (D'_2), ..., (D'_k). Une suite infinie serait

génératrice d'une suite convergente $f'^1_n(z)$ dans le domaine fermé (D'_1). La suite $f'^1_n(z)$ serait génératrice d'une suite $f'^2_n(z)$ convergeant dans le domaine fermé (D'_2) : elle converge aussi dans (D'_1) puisqu'elle est extraite de $f'^1_n(z)$. Donc $f'^2_n(z)$ converge dans (D'_1) et (D'_2). En continuant ainsi, on obtient une suite $f'^k_n(z)$ qui converge dans (D'_1), (D'_2), ..., (D'_k), c'est-à-dire dans (D'). La famille est donc normale dans l'intérieur de (D).

39. **Points irréguliers.** — Supposons qu'une famille de fonctions ne soit pas normale dans un domaine (D). Partageons cette région en deux domaines (D_1) et (D_2). La famille ne peut pas être normale dans chacun de ces domaines. En effet, si la famille $f(z)$ était normale dans (D_1), de toute suite infinie, on pourrait extraire une suite

$$f_1^1(z), \quad f_2^1(z), \quad \ldots, \quad f_n^1(z), \quad \ldots$$

convergeant uniformément dans (D_1) vers une fonction limite. Mais, la famille étant supposée normale dans (D_2), on peut extraire, de la suite précédente, une suite convergeant uniformément dans (D_2) vers une fonction limite, soit

$$f_1^2(z), \quad f_2^2(z), \quad \ldots, \quad f_n^2(z), \quad \ldots.$$

Cette suite converge aussi dans (D_1) puisqu'elle est extraite de la suite précédente : elle converge donc uniformément dans (D). Or, la suite initiale est arbitraire; la famille serait donc normale dans (D), contrairement à l'hypothèse.

Par conséquent, si la famille n'est pas normale dans (D), elle n'est pas normale dans l'un au moins des domaines (D_1) et (D_2), soit (D_1) par exemple. En partageant de nouveau (D_1) en deux domaines, on obtiendra un domaine partiel contenu dans (D_1) où la famille ne sera pas normale. En continuant ainsi, on définit une suite infinie de domaines partiels emboîtés. Ils ont au moins un point commun. Il résulte de ce qui précède que la famille n'est pas normale autour de ce point, c'est-à-dire n'est pas normale dans un cercle arbitrairement petit ayant ce point comme centre. On appelle ce point un *point irrégulier*.

Par conséquent, si une famille de fonctions n'est pas normale dans une région, cette région contient un point irrégulier au moins. Autour de ce point irrégulier, c'est-à-dire dans un cercle si petit soit-il,

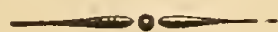
ayant ce point comme centre, toutes les fonctions $f_n(z)$ de la famille prennent dans leur ensemble toutes les valeurs, sauf deux valeurs exceptionnelles au plus. Car, s'il y avait trois valeurs exceptionnelles, la famille de fonctions serait normale dans le cercle et le point considéré ne serait pas irrégulier.

Un point irrégulier intérieur à un domaine où les fonctions de la famille sont holomorphes et bornées, n'est pas isolé.

Supposons le contraire. Soit A un point irrégulier, supposé isolé. On peut alors décrire un cercle de centre A et de rayon assez petit pour que tous les points de sa circonférence soient réguliers. Il en résulte que, de toute suite infinie on peut extraire une suite partielle convergeant uniformément, sur la circonférence vers une fonction limite finie. D'après le théorème de Weierstrass, la convergence serait alors uniforme dans le cercle tout entier et A ne serait pas un point irrégulier. Donc les points irréguliers intérieurs à un domaine d'holomorphie ne sont pas isolés.

On peut démontrer que, dans le domaine précédent, l'ensemble des points irréguliers est continu et d'un seul tenant avec la frontière.

Les points irréguliers jouent un rôle fondamental dans l'étude de la convergence des fonctions. Un tel point est en quelque sorte un *point singulier collectif*. Comme nous venons de le voir, le théorème de Picard est applicable à un point irrégulier, si l'on considère l'ensemble des fonctions qui admettent ce point comme point irrégulier.



CHAPITRE VI.

APPLICATIONS DES FAMILLES NORMALES.

40. **Fonctions holomorphes bornées.** — *Soit une famille normale de fonctions holomorphes dans un domaine* (D). *Si ces fonctions sont bornées en un point, elles sont bornées dans tout domaine* (D′) *intérieur au premier.*

Supposons que le théorème ne soit pas vrai, c'est-à-dire supposons que les fonctions $f_n(z)$ ne soient pas bornées dans leur ensemble dans le domaine (D′). Alors il y a un point z_1 du domaine (D′) et une fonction $f_1(z)$, telle que

$$|f_1(z_1)| > 1;$$

un point z_2 et une fonction $f_2(z)$ telle que

$$|f_2(z_2)| > 2,$$

en général, un point z_n et une fonction $f_n(z)$ vérifiant l'inégalité

$$|f_n(z_n)| > n.$$

Considérons alors la suite :

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots$$

formée avec les fonctions précédentes. La famille étant normale, on peut en extraire une suite partielle convergeant uniformément dans (D′) vers une fonction limite $f(z)$. Cette fonction limite est différente de la constante infinie ; en effet, par hypothèse, les fonctions sont bornées en un point z_0, que l'on peut toujours supposer intérieur à (D′) en agrandissant au besoin ce domaine. On a donc

$$|f_n(z_0)| < M$$

quel que soit n. Ceci entraîne évidemment

$$|f(z_0)| \leqq M.$$

Donc, $f(z)$ est une fonction holomorphe dans (D'); elle est bornée et l'on a

$$|f(z)| < K$$

dans tout le domaine (D'). Comme

$$|f_n(z) - f(z)| < 1$$

à partir d'un certain rang, on a évidemment

$$|f_n(z)| < K + 1$$

pour n assez grand, ce qui est en contradiction avec la supposition $|f_n(z_n)| > n$. Par conséquent, les $f_n(z)$ sont bien bornées dans leur ensemble dans le domaine (D').

41. **Premier théorème de M. Picard.** — Considérons une fonction entière $f(z)$

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

et supposons qu'elle ne se réduise pas à la constante a_0.

Traçons, dans le plan des z, les cercles de centre o et de rayons 1, 2, 2^2, ..., 2^n, ..., et étudions la famille des fonctions

$$\begin{aligned} f_0(z) &= f(z), \\ f_1(z) &= f(2z), \\ f_2(z) &= f(2^2 z), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n(z) &= f(2^n z), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

dans le cercle (C) de rayon 1. La première fonction est précisément $f(z)$ dans le cercle (C), la seconde prend, dans le cercle (C), les valeurs que prend $f(z)$ dans le cercle de rayon 2; en général, $f_n(z)$ prend, dans le cercle (C), les valeurs que prend $f(z)$ dans le cercle de rayon 2^n. La famille de fonctions considérée fait en quelque sorte la répartition par tranches des valeurs que prend $f(z)$ dans le plan.

La famille $f_n(z)$ ne peut pas être normale.

En effet, si la famille était normale, dans (C) par exemple, toutes

les fonctions $f_n(z)$ seraient bornées dans leur ensemble dans le cercle $|z| \leqq \frac{1}{2}$ en vertu du théorème du paragraphe 40, car

$$f_0(0) = f_1(0) = f_2(0) = \ldots = f_n(0) = \ldots = a_0.$$

Mais si toutes les fonctions $f_n(z)$ étaient bornées pour $|z| \leqq \frac{1}{2}$, il s'ensuivrait que la fonction entière $f(z)$ serait bornée sur toute circonférence $|z| = 2^n$, et par suite, dans tout le plan. Elle se réduirait alors à la constante a_0, en vertu du théorème de Liouville, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc *la famille $f_n(z)$ n'est pas normale dans le cercle* (C).

Les $f_n(z)$ sont holomorphes. Elles doivent alors prendre dans le cercle unité toutes les valeurs, sauf une valeur exceptionnelle au plus. Sinon, les $f_n(z)$ ne prendraient ni la valeur infinie, ni deux valeurs exceptionnelles, et la famille serait normale.

Comme les $f_n(z)$ prennent dans le cercle (C) les valeurs que prend (z) dans le plan entier, on obtient ainsi le théorème suivant :

Une fonction entière $f(z)$ prend toutes les valeurs finies, sauf peut-être une valeur au plus.

Par exemple, e^z ne prend pas la valeur zéro.

On obtient le même résultat en supposant que $f(z)$ ne prenne qu'un nombre fini de fois deux valeurs exceptionnelles : il suffit de supprimer, de la suite $f_n(z)$, un certain nombre de fonctions au début.

42. **Droites de M. Julia.** — La famille $f_n(z)$ n'étant pas normale, il y a au moins un point irrégulier dans le cercle (C). Soit P ce point, que l'on peut supposer différent de l'origine puisqu'il n'est pas isolé. Dans le voisinage de P, la famille n'est pas normale. Donc, dans un cercle (γ) arbitrairement petit de centre P, toutes les équations

$$f_n(z) = a,$$

où a est une constante finie, ont des racines quel que soit a, sauf peut-être pour une valeur au plus.

Or, les valeurs que prennent les $f_n(z)$ dans le cercle (γ) sont les valeurs que prend $f(z)$ dans les cercles homothétiques de (γ), obte-

nus par les homothéties de pôle o et de rapports 2, 2^2, ..., 2^n, ... Il s'ensuit que $f(z)$ prend une infinité de fois toutes les valeurs, sauf peut-être une valeur exceptionnelle au plus, dans le secteur de sommet O et tangent au cercle (γ) arbitrairement petit. En d'autres termes, la demi-droite OP a la propriété suivante :

Dans tout angle, aussi petit que l'on veut, dont elle est la bissectrice, la fonction entière $f(z)$ prend une infinité de fois toute valeur, sauf peut-être une valeur au plus.

Nous appellerons toute demi-droite OP, une *droite de Julia* ou droite (J).

Par exemple, pour la fonction e^z, les deux demi-droites portées par l'axe imaginaire sont des droites (J). Pour e^{z^2}, les quatre directions des bissectrices des angles des axes sont des droites (J). Pour la fonction elliptique $\sigma(z)$ de Weierstrass, toutes les droites issues de l'origine sont des droites (J). Pour les fonctions entières de Mittag-Leffler et de M. Lindelöf qui tendent uniformément vers zéro lorsque z s'éloigne à l'infini dans tout angle ne contenant pas l'axe réel, il y a une seule direction (J), l'axe réel.

Tout progrès dans l'étude des droites (J) donnera des renseignements sur la distribution des arguments des zéros des équations $f(z) = a$.

43. **Fonctions méromorphes.** — L'étude des fonctions méromorphes dans le plan, ou méromorphes pour $|z|$ assez grand, n'est qu'un cas particulier de l'étude d'une fonction autour d'un point singulier essentiel isolé que l'on peut toujours supposer à l'infini. Cette étude se ramène à son tour à celle d'une famille de fonctions, en établissant un pavage du plan autour du point singulier essentiel.

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe pour $|z| \geq \frac{1}{2}$. Traçons les cercles (C_{-1}), (C_0), (C_1), (C_2), ..., (C_n), ..., de centre zéro et de rayons respectivement égaux à $\frac{1}{2}$, 1, 2, 2^2, ..., 2^n, ...; et désignons par (Γ), (Γ_1), (Γ_2), ..., (Γ_n), ... les couronnes $(C_{-1}\, C_1)$, $(C_0\, C_2)$, $(C_1\, C_3)$, ..., $(C_{n-1}\, C_{n+1})$, ...

Considérons, dans la couronne (Γ), la famille de fonctions :

$$f_0(z) = f(z),$$
$$f_1(z) = f(2z),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$f_n(z) = f(2^n z),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$f_n(z)$ prend, dans (Γ) les valeurs que prend $f(z)$ dans la couronne (Γ_n). Donc, à l'aide de la famille $f_n(z)$, nous pourrons étudier, dans la couronne (Γ) les valeurs que prend $f(z)$ dans la région $|z| \geqq \frac{1}{2}$.

44. **Second théorème de M. Picard.** — *Une fonction ayant un point singulier essentiel isolé prend, autour de ce point, une infinité de fois toute valeur sauf peut-être deux valeurs au plus.*

Nous allons montrer que si une fonction admet trois valeurs exceptionnelles au voisinage d'un point, ce point ne peut être un point singulier essentiel.

Supposons que le point singulier soit à l'infini et que la fonction $f(z)$ admette trois valeurs exceptionnelles que nous pouvons supposer être 0, 1, ∞.

La fonction $f(z)$ est holomorphe, différente de 0 et de 1 à l'extérieur d'un cercle que nous pouvons supposer être le cercle C_{-1}. Les fonctions $f_n(z)$ sont alors holomorphes, différentes de 0 et de 1 dans l'anneau (Γ) : elles forment donc une famille normale dans l'intérieur de (Γ). Considérons la suite des valeurs $f_n(1)$ et supposons qu'elle ait une valeur limite finie correspondant à une suite de valeurs n_1, $n_2, \ldots, n_k, \ldots$ de l'indice n. Les fonctions $f_{n_k}(z)$ seraient donc bornées en module sur la circonférence (C_0) et $|f(z)|$ serait uniformément borné sur les circonférences (C_{n_k}) par un nombre M. On aurait donc aussi

$$|f(z)| < M$$

dans les couronnes limitées par ces circonférences et, par conséquent, quel que soit z pour $|z| \geqq 1$. Le point à l'infini ne pourrait donc être un point essentiel.

Supposons maintenant que $f_n(1)$ ait pour seule limite la valeur ∞ ;

il suffit de remplacer $f_n(z)$ par $\frac{1}{f_n(z)}$ pour être ramené au cas précédent.

Par conséquent, s'il existe trois valeurs exceptionnelles, le point à l'infini ne peut être qu'un point ordinaire ou un pôle. Si la fonction est entière, c'est un polynome ; si elle est méromorphe, c'est une fraction rationnelle.

On voit donc que les fonctions $f(z) - a$ ont une infinité de zéros autour d'un point singulier essentiel isolé sauf peut-être pour deux valeurs de a au plus ; car, dans le cas contraire, on pourrait tracer un cercle assez petit, ayant son centre au point essentiel, et dans lequel la fonction ne prendrait aucune des trois valeurs.

45. **Droites (J) des fonctions méromorphes.** — Considérons une fonction $f(z)$ méromorphe à distance finie et admettant une valeur exceptionnelle a. Elle possède au moins une droite de M. Julia. En effet, la fonction $g(z) = \frac{1}{f(z) - a}$ est entière ; elle possède donc au moins une droite (J). Il s'ensuit que $f(z) = \frac{1}{g(z)} + a$ a une droite (J) au moins.

Une fonction, méromorphe autour d'un point singulier essentiel isolé, qui possède une valeur asymptotique, admet une droite (J) *au moins.*

Rappelons qu'une fonction $f(z)$ ayant un point essentiel isolé admet une valeur asymptotique a lorsqu'il existe un chemin ayant pour extrémité le point essentiel tel que les valeurs de $f(z)$ sur ce chemin aient pour limite unique a lorsque z a pour limite le point singulier. Le chemin s'appelle un *chemin de détermination.*

Supposons le point singulier à l'infini et divisons le plan en couronnes, comme au paragraphe précédent. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe pour $|z| \geqq \frac{1}{2}$ qui tend vers la valeur asymptotique a, sur le chemin $(\mathcal{L})$. Considérons toujours la famille

$$f_n(z) = f(2^n z)$$

dans l'anneau (Γ_0) compris entre les circonférences (C_{-2}) de rayon $\frac{1}{4}$ et (C_2) de rayon 4. Cette famille ne peut pas être normale dans le

domaine. En effet, dans le cas contraire, on pourrait extraire de toute suite infinie de fonctions $f_n(z)$, une suite partielle $f_n^h(z)$, convergeant uniformément dans (Γ). La fonction limite de cette suite est nécessairement la constante a. Pour le montrer, remarquons que le chemin $(\mathcal{L})$ coupe les circonférences (C_n) en des points admettant une infinité d'homologues sur la circonférence (C_0). Donc il y a, sur cette circonférence (C_0), une infinité de points où l'une des fonctions $f_n^h(z)$ prend une valeur voisine de a. La limite $f_0(z)$ de la suite $f_n^h(z)$ prend donc sur (C_0) la valeur a. Mais le raisonnement peut s'appliquer à toute circonférence voisine de (C_0) et contenue dans (Γ), la fonction limite prend aussi la valeur a sur cette circonférence. Donc, la suite converge uniformément vers a dans toute la couronne (Γ). Ainsi, toute suite convergente extraite de la suite $f_n(z)$ converge uniformément vers a dans (Γ). Je dis que la suite $f_n(z)$ elle-même converge uniformément vers a dans (Γ). Dans le cas contraire, il existerait un nombre ε_0 et une suite infinie $f_n^{(k)}(z)$ extraite de la famille $f_n(z)$, telle que l'on ait, pour un point z_n de (Γ),

$$|f_n^k(z_n) - a| > \varepsilon_0.$$

Mais on peut extraire de la suite $f_n^k(z)$ une suite partielle

$$f_{n_1}^{(k)}(z), \quad f_{n_2}^{(k)}(z), \quad \ldots, \quad f_{n_p}^{(k)}(z), \quad \ldots$$

convergeant uniformément dans (Γ) vers a. On aurait donc, pour p assez grand et quel que soit z dans (Γ),

$$|f_{n_p}^{(k)}(z) - a| < \varepsilon_0,$$

et, en particulier,

$$|f_{n_p}^{(k)}(z_{n_p}) - a| < \varepsilon_0,$$

tandis que, par hypothèse,

$$|f_{n_p}^{(k)}(z_{n_p}) - a| > \varepsilon_0;$$

par conséquent, $f_n(z)$ converge uniformément vers a dans (Γ); on a donc, pour $n > n_0$,

$$|f_n(z) - a| < \varepsilon,$$

ε étant arbitrairement choisi; par suite, lorsque $|z|$ est supérieur à 2^{n_0}, on aurait

$$|f(z) - a| < \varepsilon,$$

$f(z)$ aurait pour limite a quand z croît indéfiniment et le point à l'infini ne serait pas singulier.

Donc la famille $f_n(z)$ a au moins un point irrégulier P dans la couronne (Γ). La droite OP est alors une droite (J) pour la fonction $f(z)$.

Nous avons ainsi déterminé deux catégories de fonctions méromorphes admettant certainement des droites (J) : 1° Les fonctions ayant une valeur exceptionnelle ; 2° les fonctions ayant une valeur asymptotique. D'ailleurs une valeur exceptionnelle est toujours une valeur asymptotique. Ce ne sont pas les seules fonctions méromorphes admettant des droites (J). Par exemple, la fonction elliptique pz admet comme droites (J) toutes les droites du plan, car un secteur arbitraire contient une infinité de parallélogrammes des périodes. Cependant pz n'a ni valeur exceptionnelle, ni valeur asymptotique. M. Ostrowski [1] a trouvé les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction méromorphe autour d'un point singulier essentiel admette des droites (J). Les fonctions dépourvues de droites (J) s'appellent *fonctions exceptionnelles* (O). Voici, sans démonstration, les résultats de M. Ostrowski pour le cas d'une fonction méromorphe dans le plan.

Théorème de M. Ostrowski. — *Pour qu'une fonction $f(z)$ méromorphe dans le plan soit exceptionnelle, il faut et il suffit qu'elle satisfasse aux quatre conditions suivantes :*

1° *$f(z)$ est de genre zéro.* Nous l'écrirons sous la forme

$$f(z) = z^k \frac{\prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_i}\right)}{\prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{b_j}\right)},$$

k désignant un entier positif, négatif ou nul.

2° Les a_i et les b_j obéissent aux lois de régularité suivantes : *la différence entre le nombre des pôles et le nombre des zéros de modules inférieurs à r est bornée quel que soit r. Dans la*

[1] *Ueber Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes* (*Math. Zeitschrift*, Bd. 24, 1925, p. 215-258).

couronne $r \leq |z| \leq 2r$, *le nombre des zéros et celui des pôles de* $f(z)$ *sont bornés, quel que soit* r. *Aucune limite des valeurs* $\frac{a_i}{b_j}$ *n'est égale à l'unité.*

3° Formons l'expression :

$$\mathfrak{M}(r) = r^k \frac{\prod \frac{r}{|a_i|}}{\prod \frac{r}{|b_j|}} \qquad (|a_i| < r, |b_j| < r).$$

$\mathfrak{M}(a_i)$ *et* $\frac{1}{\mathfrak{M}(b_j)}$ *sont bornés quel que soit* r.

Par exemple, la fonction

$$f(z) = \frac{\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{2^n}\right)}{\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{2^n}\right)}$$

est exceptionelle (O).

46. Extensions diverses. — Considérons une fonction $f(z)$; soit a une valeur non exceptionnelle et (J) une droite de M. Julia. Si (γ) est un cercle ayant pour centre un point irrégulier P de rayon aussi petit que l'on veut, nous savons que $f(z)$ prend la valeur a dans (γ) et dans tous les cercles homologues. M. W. Saxer [1] a traité le problème suivant :

Dans quel cas l'équation $f(z) - a = 0$ *a-t-elle un nombre borné de racines dans le cercle* (γ) *et les cercles homologues?*

Pour toutes les valeurs de a, à l'exception de deux au plus, le nombre des racines augmente indéfiniment avec le rang des cercles, sauf pour certaines fonctions exceptionnelles (S). Toutes les fonctions exceptionnelles (S) sont de genre 0, de la forme précédente, mais les a_i et les b_j obéissent à des conditions de régularité moins étroites que dans le cas des fonctions exceptionnelles (O). Il y a

---

[1] *Ueber quasi-normale Funktionsscharen und eine Verschärfung des Picardschen Satz* (*Math. Annalen*, Bd. 99, 1928, p. 707-737).

des fonctions entière exceptionnelles (S), par exemple la fonction entière $\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2^n}\right)$.

On a aussi étudié l'existence de droites analogues aux droites (J) relatives aux équations $f(z)-R(z)=0$, $R(z)$ désignant une fraction rationnelle, ou aux distributions exceptionnelles de M. Borel; et d'autres extensions [1].

47. **Rapports entre les points singuliers et les droites (J).** — Considérons une fonction holomorphe définie par une série de Taylor dont le rayon de convergence est fini et les demi-droites qui joignent l'origine aux points singuliers situés sur le cercle de convergence. M. André Bloch a pensé que ces demi-droites sont à rapprocher des demi-droites (J) correspondant aux fonctions entières, fonctions pour lesquelles le rayon de convergence est infini.

Cette vue est confirmée par les rapprochements suivants :

L'ensemble des droites (J) d'une fonction entière est fermé car toute droite limite de droites (J) est une droite (J). De même : l'ensemble des points singuliers d'une fonction situés sur le cercle de convergence est fermé. M. G. Pólya [2] a poussé très loin la comparaison et montré que la plupart des théorèmes connus sur la distribution des points singuliers du cercle de convergence avaient leurs correspondants dans la distribution des droites (J) d'une fonction entière, au moins lorsque l'ordre est infini. Nous en avons indiqué quelques-uns dans l'Introduction.

48. **Théorèmes de M. Schottky et de M. Landau. Extensions.** — Considérons la famille des fonctions $f(z)$ holomorphes dans le

(1) *Voir* en particulier, M. Biernacki, *Sur les droites de Julia des fonctions entières* (*Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de Paris*, t. 186, 1928, p. 1260 et 1410). — G. Valiron, *Le théorème de M. Picard et le complément de M. Julia* (*Journal de Math.*, t. VII, 1928, p. 113-136); *Recherches sur le théorème de M. Borel dans la théorie des fonctions méromorphes* (*Acta mathematica*, t. 52, 1928, p. 67-92). — H. Milloux, *Les cercles de remplissage des fonctions méromorphes ou entières et le théorème de Picard-Borel* (*Acta mathematica*, t. 52, 1928, p. 189-255).

(2) *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen* (*Math. Zeitschrift*, Bd. 24, 1929, p. 549-640).

cercle de rayon 1, ne prenant pas dans ce cercle les valeurs 0 et 1 et dont le premier terme du développement en série est a_0. Ces fonctions forment une famille normale. Comme $f(0) = a_0$ est fixe, les fonctions $f(z)$ sont bornées dans leur ensemble dans le cercle $|z| \leqq \frac{1}{2}$, par exemple [n° 40]. On a donc

$$|f(z)| < \Omega(a_0)$$

dans le cercle de rayon $\frac{1}{2}$, $\Omega(a_0)$ désignant un nombre positif qui ne dépend que de a_0. Considérons maintenant les fonctions $f(z)$, holomorphes dans le cercle $|z| < R$, différentes de 0 et de 1 dans ce cercle et telles que leur valeur pour $z = 0$ soit aussi a_0. On a encore

$$|f(z)| < \Omega(a_0)$$

pour $|z| \leqq \frac{R}{2}$, car, en posant $z = Rz_1$, $f(z) = f(Rz_1)$ devient une fonction possédant les mêmes propriétés dans le cercle de rayon 1. De même, on aurait pour tout cercle de rayon θR avec $0 < \theta < 1$,

$$|f(z)| < \Omega(a_0, \theta).$$

C'est le théorème de M. Schottky, cas particulier du théorème du paragraphe 40.

Maintenant, considérons les fonctions holomorphes pour $|z| < R$ dont les premiers coefficients du développement en série sont a_0 et a_1 différent de zéro. On a, d'après une inégalité de Cauchy,

$$|f'(0)| \leqq \frac{\text{max de } |f(z)| \text{ pour } |z| \leqq \frac{R}{2}}{\frac{R}{2}}$$

ou

$$|a_1| \leqq \frac{2\,\Omega(a_0)}{R};$$

donc

$$R \leqq \frac{2\,\Omega(a_0)}{|a_1|}.$$

C'est le théorème de M. Landau :

Soit une fonction

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

qui ne prend pas les valeurs 0 *et* 1 *dans le cercle* $|z| < R$. *Si l'on se donne les deux premiers coefficients* a_0 *et* $a_1 \neq 0$ *du développement, le nombre* R *est borné par une fonction de* a_0 *et de* a_1.

On peut, dans ce théorème, remplacer la condition $a_1 \neq 0$ par toute autre condition telle que la famille considérée ne contienne aucune constante; par exemple, $a_p \neq 0$ avec $p > 1$; ou $f(1) = b_0 \neq a_0$. On obtiendra toujours une limite supérieure pour le rayon de convergence. Plus généralement :

Considérons les fonctions

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_p z^p + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

dont les $p+2$ *premiers coefficients sont fixes, avec* $a_{p+1} \neq 0$, *et qui ne prennent pas plus de* p *fois les valeurs* 0 *et* 1. *Le rayon du cercle de convergence de ces fonctions est borné supérieurement par une fonction des coefficients donnés.*

La démonstration peut être obtenue en suivant une marche analogue à la précédente. Ici aussi, on peut remplacer la condition $a_{p+1} \neq 0$ par toute autre condition telle que la famille considérée ne contienne aucun polynome de degré p.

La dernière proposition peut être étendue au cas où $f(z)$ est une fonction méromorphe ne prenant pas plus de p fois trois valeurs données. Il y a une limite supérieure pour le rayon du cercle dans lequel la fonction est méromorphe quand on se donne un nombre convenable de coefficients de la série de Taylor.



TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE IV.

NOUVELLES PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION CARACTÉRISTIQUE.

CHAPITRE V.

FAMILLES NORMALES DE FONCTIONS.

CHAPITRE VI.

APPLICATIONS DES FAMILLES NORMALES.



Leçons sur les fonctions de lignes, professées à la Sorbonne en 1911, par Vito Volterra, recueillies et rédigées par *J. Pérès*......... 25 fr.

Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, par Frédéric Riesz.. 25 fr.

Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire, par C. de la Vallée Poussin.. 25 fr.

Leçons sur les méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires et leurs développements modernes, professées à la Sorbonne en 1913-1914, par Maxime Bôcher, recueillies et rédigées par Gaston Julia.. 25 fr.

Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe, par Émile Borel rédigées par G. Julia........................ 25 fr.

Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, professées à la Sorbonne par C. de la Vallée Poussin............... 25 fr.

Leçons sur les fonctions automorphes. Fonctions automorphes de n variables. Fonctions de Poincaré, par Georges Giraud......... 25 fr.

Méthodes et problèmes de Théorie des Fonctions, par É. Borel. 25 fr.

Leçons d'analyse fonctionnelle, professées au Collège de France, par Paul Lévy, Professeur à l'Ecole Polytechnique, avec une *Préface* de J. Hadamard, Membre de l'Institut........................ 50 fr.

Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé, professées au Collège de France par Gaston Julia, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, rédigées par P. Flamant.............. 25 fr.

L'Analysis Situs et la Géométrie algébrique, par S. Lefschetz. 25 fr.

Leçons sur les fonctions quasi analytiques, professées au Collège de France par T. Carleman, Professeur à l'Université de Stockholm. 40 fr.

Leçons sur la Composition et les Fonctions permutables, par Vito Volterra, Membre de l'Institut, Professeur à l'Université de Rome, et Joseph Pérès, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille.......... 25 fr.

Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle, professées à la Sorbonne par Serge Bernstein, Correspondant de l'Institut, Membre de l'Académie des Sciences d'Ukraine.. 50 fr.

Leçons sur les Séries d'interpolation, par N.-E. Nörlund, Professeur à l'Université de Copenhague, Membre correspondant de l'Institut de France, rédigées par René Lagrange.. 50 fr.

Leçons sur les Familles normales de fonctions analytiques et leurs applications, par P. Montel, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, recueillies et rédigées par J. Barbotte.................... 50 fr.

Leçons sur les nombres transfinis, par W. Sierpinski, Membre de l'Académie polonaise des Sciences et des Lettres, Professeur à l'Université de Varsovie.. 40 fr.

Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, par Rolf Nevanlinna, Professeur à l'Université de Helsingfors. In-8 de VII-174 pages.. 35 fr.

Leçons sur les équations linéaires aux différences finies, par Nörlund (N. E.), rédigées par *René Lagrange*, Professeur à l'Université de Dijon. In-8 de VII-154 pages.. 50 fr.

Les problèmes des Isopérimètres et des Isépiphanes, par Bonnesen (T.), Professeur à l'Ecole Polytechnique de Copenhague. In-8 de 175 p. 40 fr.

Leçons sur les Séries divergentes, par Émile Borel............ 40 fr.

Les Espaces abstraits et leurs théories, par Fréchet.......... 50 fr.

Leçons sur les Ensembles analytiques, par Lusin............. 60 fr.

Cahiers scientifiques (suite)

FASCICULE V. — *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la Théorie des Équations différentielles*, par Emile PICARD, de l'Académie française, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, Professeur à l'Université de Paris. Rédigées par Marcel BRELOT, ancien Elève de l'Ecole Normale supérieure. Un volume in-8 raisin (25-16) de 271 pages .... 60 fr.

FASCICULE VI. — *Principes géométriques d'Analyse.* 1re Partie. Leçons faites à la Sorbonne par Gaston JULIA, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris. Recueillies et rédigées par Marcel BRELOT et René de POSSEL, Agrégés de l'Université, anciens Élèves de l'École Normale supérieure. Un volume in-8 raisin (25-16) de 116 pages. 25 fr.

FASCICULE VII. — *Leçons sur la Théorie mathématique de la Lutte pour la vie*, par Vito VOLTERRA, Membre de l'Institut, Professeur à l'Université de Rome, rédigées par Marcel BRELOT, ancien Élève de l'École Normale supérieure. Un volume in-8 raisin (25-16) de 210 pages.......... 60 fr.

FASCICULE VIII. — *Leçons sur le Problème de la Représentation conforme*, par Gaston JULIA, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris. Un volume in-8 (25-16) de VIII-114 pages.......... 30 fr.

FASCICULE IX. — *Quelques applications analytiques de la Théorie des courbes et des surfaces algébriques*, par Émile PICARD, de l'Académie française, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, Professeur à l'Université de Paris. Leçons rédigées par M. Jean DIEUDONNÉ, Agrégé de l'Université. Un volume in 8 (25-16) de VIII-224 pages. 50 fr.

FASCICULE X, — *Leçons sur la Géométrie projective complexe*, par E. CARTAN, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, d'après les notes recueillies par M. F. MARTY, Élève de l'École Normale supérieure. Un volume in-8 (25-16), de VII-325 pages.......... 80 fr.

92280. —Paris — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Date Due

FORM 109			